REVUE

DE

MATHÉMATIQUES

(RIVISTA DI MATEMATICA)

PUBLIÉE PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin

Tome VII

TURIN

BOCCA FRÈRES

LIBRAIRES

1900-1901

TABLE DES MATIÈRES

G. PEANO — Formules de logique mathématique . . . . p. 1

M. NASSÒ — Alcuni teoremi di Aritmetica . . . . . . » 42

P. BUFFA — Alcune formule di logica . . . . » 56

F. CASTELLANO — Alcune identità . . . . » 58

G. VACCA — Additions au Formulaire . . . . » 59

M. CHINI — » » . . . . » 66

G. ENESTRÖM — » » . . . . » 66

G. PEANO — » » . . . . » 67

T. BOGGIO — » » . . . . » 70

A. PADOA — Numeri interi relativi . . . . » 73

International Association for Quaternions . . . . » 84

Additions et corrections au Formulaire a. 1901, par E. CANTONI, C. CIAMBERLINI, G. ENESTRÖM, A. PADOA, G. PEANO, A. RAMORINO, O. STOLZ, G. VACCA . . . . » 85

Albino Nagy, Necrologia (PADOA) . . . . » 111

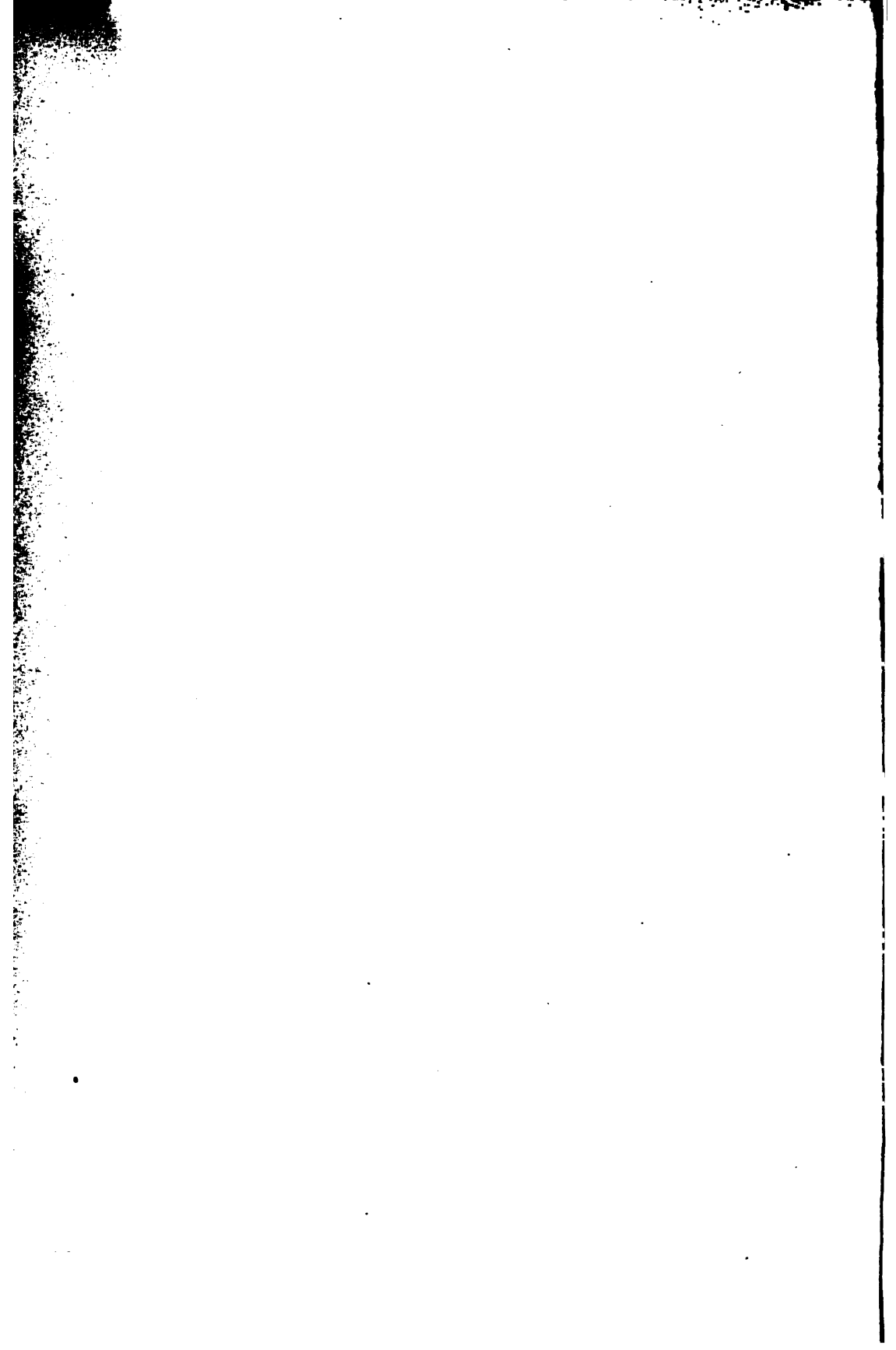
Recensione — O. Stolz und I. A. Gmeiner, Theoretische Arithmetik (Peano) » 112

B. RUSSELL — Sur la logique des relations . . . . » 115

L. COUTURAT — La logique de Leibniz d'après des documents inedits (Recensione, VAILATI) . . . . » 148

Dizionario di Matematica — Parte I, Logica matematica (PEANO) . » 160

Additions au Formulaire a. 1901, par A. ARBICONE, T. BOGGIO, E. CANTONI, F. CASTELLANO, G. PEANO, G. VACCA . . . . . » 173

REVUE DE MATHÉMATIQUES
Tome VII — 1900

FORMULES DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE

par G. PEANO

La lettre F suivie de l'année, indique les éditions des « formules de Logique mathématique », que nous avons successivement publiées:

F1888 = Calcolo geometrico, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.

F1889 = Arithmetices principia, nova methodo exposita.

F1894 = Introduction au Formulaire de Mathématiques.

F1895 = Formulaire de Mathématiques t.1, partie I. Il a été publié partiellement dans la RdM. a.1891-1895.

F1897 = Formulaire de Mathém. t.2 N1.

F1898 = » » t.2 N2.

F1899 = » » t.2 N3.

Les symboles de Logique, combinés avec les symboles plus répandus de l'Analyse, constituent une idéographie, par laquelle on peut exprimer les différentes théories mathématiques.

Cette idéographie est déjà assez vaste, car le Formulaire a.1899, contient les principales propositions, de l'Arithmétique à la Géométrie et aux principes du calcul intégral, complétement exprimées en symboles.

Ces propositions ont la forme des formules algébriques communes. La différence est que les formules communes ne sont que la partie symbolique de l'énoncé d'une proposition; les formulaires publiés par différents Auteurs ne contiennent en général que des fragments de propositions; ces formules isolées sont quelquefois inintelligibles; les conditions restrictives pour la validité des théorèmes manquent en général.

Les formules que nous publions ici sont des propositions complètes, avec la signification des lettres, et toutes les limitations nécessaires.

Les mots du langage mathématique commun montent à plusieurs milliers (il y en a 1000 à peu près dans les Œuvres d'Archimède). Toutes ces idées sont exprimées, dans F1899, par environ 100 symboles.

Nous avons conservé aux symboles la forme commune, lorsque cela a été possible; ex: $+$, $-$, $\times$, $>$, $=$, 0, 1, 2,... log, sin, e, π... Lorsqu'il y a plusieurs notations en usage, nous avons adopté la plus ancienne, ou la plus répandue. Lorsque nous avons dû introduire un symbole nouveau, nous avons pris le mot du langage ordinaire, plus ou moins abrégé; ex: pnt, vct, quot, rest,...

Les propositions écrites en symboles sont notablement plus courtes que dans le langage ordinaire. On peut le remarquer dans toute proposition symbolique, qui soit suivie de l'énoncé ordinaire selon l'A. qui l'a trouvée. Dans quelques cas, comme dans les limites, les séries, les dérivées, l'énoncé ordinaire est tellement compliqué, qu'on supprime en général quelques conditions importantes.

Cette abréviation ne dépend qu'en minime partie, d'avoir écrit « rest » au lieu de « reste », mais bien de l'analyse des idées et par la suppression des inutiles.

Les démonstrations, aussi réduites complètement en symboles, consistent dans une suite de transformations des propositions précédentes dans la proposition à démontrer, selon des règles étudiées par la Logique mathématique.

Dans le langage ordinaire, on a plusieurs formes pour représenter une même idée indiquée ici par un symbole seul. Nous donnons à chaque symbole un nom; mais il convient de lire ce symbole, ou un ensemble de symboles, sous une forme qui satisfasse aux lois du langage ordinaire.

Un peu d'exercice permet de lire les formules, en donnant aux propositions la tournure à laquelle nous sommes habitués.

L'histoire de la Logique mathématique est contenue dans les formules suivantes; car les propositions sont accompagnées de la citation des Auteurs qui les ont énoncées. On peut la résumer en quelques mots.

Les propositions de logique expriment des formes de raisonnement très communes dans les sciences mathématiques; elles sont en partie intuitives. On ne peut pas indiquer celui qui, le

premier a fait usage du raisonnement d'une forme donnée; mais nous pouvons bien indiquer l'A. qui l'a explicitement énoncée, et qui l'a réduite en symboles.

Quelques formes de raisonnement, comme le syllogisme ont été analysées par Aristote (Voir §1 P2·4).

Peut-être que dans les œuvres des scolastiques on trouvera d'autres formes; mais la logique mathématiqne doit ses principaux théorémes à Leibniz. Il a introduit des symboles pour indiquer les opérations et les relations logiques entre classes; et il a écrit les principales formules logiques qui contiennent une seule fois le signe =. (Voir §1 P2·4, 4·2, §2 P2·1, etc.).

Le nombre de ces formules a été augmenté par Boole a.1854 (§1 P4·3...) et par Schröder a.1877 (§2 P3·2...).

McColl a.1878 et Peirce a.1867-1880 ont introduit les signes de déduction et d'égalité entre propositions: ils sont arrivés à exprimer des formules contenant plusieurs de ces signes, réduites partiellement en symboles par les A. précédents. Voir §1 P3·6 4·0 5·3.....

Un grand nombre d'A., qui ont étudié les mêmes questions, sont mentionnés dans les formules suivantes, ou dans les éditions précédentes, ou leurs résultats ne sont pas encore réduits en symboles.

Dans F1888 et 1889, par l'introduction des signes ε et ɜ, nous avons expliqué la relation entre les deux calculs, entre classes, et entre propositions, et nous avons entièrement énoncé en symboles un ensemble de propositions.

Plusieurs A. ont appliqué cette idéographie à différentes théories mathématiques; en voici la liste:

F. Amodeo, *Aritmetica particolare e generale*, Napoli, 1900, p.411.
R. Bettazzi, F t.1 partie VII. RdM. t.4 p.161.
C. Burali Forti, Collaboration à F t.1 partie III. RdM. t.3 p.75.
— F t.1 partie IV. *Teoria delle Grandezze*. RdM. t.3 p.76.
— *I numeri negativi*. RdM. t.3 p.138.
— *Sulle classi derivate a destra e a sinistra*, TorinoA. 1894.
— *Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti*, PalermoR. 1894.
— *Logica matematica*, Milano, Hoepli, 1894.
— *Sul limite delle classi variabili*, TorinoA. 1895.
— *Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles*. MA. t.47 p.20.

C. Burali Forti, *Il metodo del Grassmann nella Geometria proiettiva*, PalermoR. 1896-97.
— *Le classi finite*, TorinoA. 1896.
— *Sopra un teorema del sig. G. Cantor*, TorinoA. 1896.
— *Excercice de traduction en symboles de Logique Mathématique.* Bulletin de Mathématiques élémentaires, 1897.
— *Una questione sui numeri transfiniti*, PalermoR. 1897.
— *Les propriétés formelles des opérations algébriques*, RdM. t.6 p.141.
— *Sui simboli di Logica matematica.* Il Pitagora, a.1900, p.1. 65, 129.
F. Castellano, Collaboration à F t.1 partie II. RdM. t.3 p.1.
M. Chini, Collaboration à F1898.
L. Couturat, *La logique mathématique de M. Peano.* Revue de Métaphysique et de Morale, a.1899 p.616.
G. Fano, *Contributo alla teoria dei numeri algebrici*, F t.1 partie IX. RdM. t.5 p.1.
C. Garibaldi, *Contributo alla teoria degli aggregati*, PalermoR. 1895.
F. Giudice, F t.1 partie VIII. RdM. t.4 p.163.
— *Sulla determinazione dei Numeri Reali mediante somme e prodotti.* TorinoA. 1894.
A. Padoa, Collaboration à F1898, F1899.
— *Di alcune proposizioni fondamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti.* RdM. t.6, p.35.
— *Ideografia delle frazioni irriducibili.* RdM. t.6, p.90.
— *Note di Logica matematica.* RdM. t.6, p.105.
— *Conférences sur la Logique mathématique.* Université nouvelle de Bruxelles, a.1898.
— Conferenze tenute nella R. Università di Pavia, a.1898-99.
— » » Roma, a.1900.
G. Peano, *Principii di Geometria*, Torino, Bocca, a.1889.
— *Les propositions du V*ième *livre d'Euclide*, Mathesis t.10 a.1890. (Reproduit par Dickstein, *Pojecia i metody matematyky* a.1891).
— *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.* MA. t.37 a.1890.
— *Principii di Logica matematica.* RdM. t.1 a.1891.
— *Principios de Lógica matemática.* El Progreso matemático a.1892 p.20. (Traduction de la Note précédente).
— *Sommario dei libri VII, VIII e IX d'Euclide.* RdM. t.1.
— *Formule di Logica matematica.* RdM. t.1 p.24, 182.
— *Sul concetto di numero.* RdM. t.1 p.82, 256.
— *Sulla definizione del limite d'una funzione.* RdM. t.2 p.77.
— *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Torino, a.1893. (Une partie a été traduite dans : Genocchi, Differentialrechunung, Deutsch von Bohlmann und Schepp, a.1899).
— F t.1 partie V. RdM. t.4 p.33.
— *Sui fondamenti della Geometria.* RdM. t.4 p.51.
— *Notions de Logique mathématique.* Congrès de Caen, a.1894.

— *Estensione di alcuni teoremi di Cauchy sui limiti.* TorinoA. a.1894.
— *Sulla definizione di integrale.* AdM. a.1895.
(Traduit dans Genocchi, id.).
— *Studii di Logica matematica.* TorinoA. a.1897.
(Traduit dans Genocchi, id.).
— *Generalità sulle Equazioni differenziali ordinarie.* TorinoA 1897.
— *Analisi della Teoria dei Vettori.* TorinoA. a.1898.

M. Pieri, *Sui principii che reggono la Geometria di posizione,* Note I, II, III. TorinoA. 1995-96.
— *Un sistema di postulati per la Geometria Projettiva astratta degli iperspazi.* RdM. a.1896.
— *Sugli Enti primitivi della Geometria proiettiva astratta.* TorinoA. 1897.
— *Nuovo modo di svolgere deduttivamente la Geometria projettiva.* MilanoR. a.1898.
— *I principii della Geometria di posizione.* TorinoM. a.1898. t.48.
— *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto e del moto.* TorinoM. a.1900, t.49.

G. Vacca, Collaboration à F1898, F1899.
— *Sui precursori della Logica matematica.* RdM. t.6 p.121, p.183.

G. Vailati, *Un teorema di logica matematica.* RdM. t.1, p.103.
— *Le proprietà fondamentali delle operazioni della logica deduttiva.* RdM. t.1, p.127.
— *Sui principî fondamentali della geometria della retta.* RdM t.2, p.71.
— *Dipendenza fra le proprietà delle relazioni.* RdM. t.2, p.161.
— *Sulle relazioni di posizione fra punti d'una linea chiusa.* RdM. t.5 p.75.
— *Sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione.* RdM t.5, p.183.
— Collaboration à F t.1 partie I.

G. Vivanti, F t.1 partie VI; RdM. t.4, p.135.

I. Zignago, *Appunti di Aritmetica.* RdM. t.4, p.121.

L'*Algebra der Logik* de M. Schröder a.1890-95 appartient à un autre ordre d'idées. Voir RdM. t.1 p.164, t.6 p.95.

Nous en avons tiré seulement quelques propositions (§2 P3·2).

M. Frege est arrivé de son côté, a.1894, à une idéographie par laquelle il a exprimé des propositions sur l'idée de nombre. Voir RdM t.5 p.122, t.6 p.53.

La dernière édition complète des formules de logique a paru dans F1897. Dans les applications successives on a rencontré de nouvelles propositions, et l'on a vu l'utilité de nouveaux symboles, parus dans F1898 et 1899. Des remarques importantes ont été publiées par MM. Padoa RdM. t.6 et Couturat.

Une nouvelle édition des formules de Logique est donc nécessaire. Nous réproduisons ici toutes les propositions de Lo-

gique entièrement écrites en symboles, à l'exception de quelques unes, qui contiennent des symboles non adoptés dans F1899.

L'utilité des symboles est mise en lumière, et mesurée par leurs applications. Nous supprimons donc toutes les discussions à cet égard contenues dans les éditions précédentes. Il nous suffit de remarquer que les symboles contenus dans le §1, et notamment les trois ⊃, ε et ⌒ (sous-entendu) sont d'un usage universel ; ils se rencontrent partout ; combinés avec les symboles de l'Algèbre, ils permettent d'exprimer le plus grand nombre de propositions.

Les autres symboles sont plus rarement adoptés.

Les propositions sont ordonnées selon les signes qui entrent dans leur expression symbolique. Toute proposition est indiquée par un nombre qui a une partie entière et une décimale.

Le signe ✱ indique le changement de la partie entière.

Les abréviations des citations bibliographiques sont expliquées dans F1899.

Table des formules de Logique.

§1	Cls ε ɜ ; ⊃ ⌒ =	p. 7	§8	⁏	p.36
§2	∪	p.23	§9	f ɟ	p.36
§3	Λ	p.26	§10	|	p.38
§4	-	p.27	§11	‘ ’	p.38
§5	Ǝ	p.32	§12	sim rcp idem	p.40
§6	ι	p.34	§13	Variab F Funct	p.40
§7	ɩ	p.35	§14	-1 (inversion)	p.41

§1 Cls ε $\ni$; $\supset$ $\frown$ $=$

✱ 1. *Notations*

·1 *a b* ...

Les lettres *a b* ... *z a'* ... désignent des objets quelconques.

Les lettres variables, dans le Form., sont toujours en *italique*.

Les signes ayant une signification constante ont une forme spéciale: $\supset = + - \times$ ..., ou bien sont indiqués par des lettres grecques ε ι Σ, ou par des lettres romaines: Cls log mod ...

On rencontre les lettres variables dans Aristote pour représenter les idées de Logique (V. P2·4); elles sont d'un usage commun chez Euclide pour indiquer des points, des lignes, des nombres, etc. (V. §$\times$ P1·3).

Dans ces notes nous dirons qu'une lettre est *réelle* dans une formule, lorsque la valeur de la formule dépend du nom de la lettre ; dans le cas contraire la lettre est *apparente*.

Une P (proposition) ne contenant pas de lettres variables réelles est dite *catégorique*. Sont telles les théorèmes et les définitions ; toutes les lettres qui y figurent sont apparentes.

Une P contenant des variables réelles est dite *conditionnelle*.

P. ex. la P : (soient *a* et *b* des nombres ; on a $ab = ba$)
est catégorique. La P : $ab = ba$
est conditionnelle ; elle est satisfaite si *a* et *b* sont des nombres ; elle ne l'est pas s'ils sont des nombres complexes d'ordre superieur, per ex. des quaternions ; elle n'a pas de signification si *a* et *b* sont des objets dont on n'a pas défini le produit.

A propos des signes $\ni$ $\supset$ | nous donnerons les règles pour reconnaître, à la position, les variables apparentes.

Dans le langage commun les pronoms « ceci, cela, le même, premier, deuxième,... » jouent le rôle des lettres variables. On pourrait les remplacer par les nombres 1, 2,... en faisant des conventions opportunes pour ne pas produire des ambiguïtés dans l'Arithmétique. Voir F1897 p.26.

·2 . () [] {}

On divise une formule en parties par des parenthèses () [] {} ou par des points.

On écrit un point là où l'on fait la division. Si à cette place on a déjà un point, on écrira un nouveau point, et ainsi de suite. Si *a, b, c,* ... désignent des signes quelconques, les groupements:

a.bc	*ab.c*	*ab.cd*	*a:bc.d*	*ab.cd:e.fg.·.hk.l*

seront identiques à

a(bc)	*(ab)c*	*(ab)(cd)*	*a[(bc)d]*	{[*(ab)(cd)*][*e(fg)*]}[*(hk)l*]

Nous donnons la préférence aux parenthèses dans les formules algébriques et dans les formules composées comme les algébriques, et aux points pour séparer les propositions partielles d'un théorème; car dans ce cas les parenthèses seraient absolument incombrantes.

Pendant longtemps on a indiqué le groupement des parties d'une formule par une barre horizontale supérieure ou inférieure, dite *vinculum* (Chuquet, Leibniz, ...). Selon cette convention les groupements précédents seront indiqués par

$$a\underline{bc} \qquad \underline{ab}c \qquad \underline{ab}\,\underline{cd} \qquad a\underline{\underline{bc}d} \qquad \underline{\underline{\underline{ab}\,\underline{cd}}e}\,\underline{\underline{fg}}\,\underline{\underline{hk}l}$$

Cette convention, très claire, présente quelque difficulté typographique. Elle ne se rencontre plus aujourd'hui que dans les fractions et les racines.

Si l'on complète les vinculums, en les écrivant aussi sous une lettre seule, on voit qu'il y a autant de points que des espaces vides dans les vinculums; les points sont les compléments des vinculums.

La suite de trois lettres peut être décomposée dans les deux formes écrites; la suite de quatre lettres *abcd* dans les 5 formes:

$$a : bc \,.\, d \qquad a : b \,.\, cd \qquad ab \,.\, cd \qquad a \,.\, bc : d \qquad ab \,.\, c : d,$$

et en général la suite de n lettres peut être décomposée en $(2n)!/[n!(n+1)!]$ combinaisons binaires différentes. (F1894 §10).

Plusieurs conventions ont pour but de supprimer des divisions: P3·0, 7·1, §∪ P1·1, §− P1·2-·4, §∃ P1·01, §+ P4·7, §× P1·01 ...

Pour les faire mieux ressortir, nous donnerons aux signes des dimensions différentes, et nous nous aiderons des espaces typographiques.

Les parenthèses et les points sont des signes de l'écriture commune, bien que l'usage soit différent; dans les langages ordinaires le groupement des mots est indiqué par la construction.

Les symboles du Formul. ont une signification constante. En adoptant les parenthèses pour grouper les parties d'une formule, on ne pourra pas les adopter dans une autre signification. Nous ne pourrons pas indiquer par (a) une puissance de a, avec Girard a.1629 (voir §Q P17n), ou la partie entière de a, ou la valeur absolue de a, ou une fonction de a. En général une lettre seule ne sera jamais renfermée entre parenthèses, car elle n'est pas groupée.

·3 Cls

"Cls" signifie "classe".

Ce symbole a la forme K dans F1889 et dans les travaux de plusieurs Auteurs. Il a la valeur du mot "ὅρος" d'Aristote, "terminus" des scolastiques; et correspond aussi à "idée générale, nom commun, ..." du langage ordinaire, et aux expressions "ensemble, Menge" des mathématiciens.

P. ex. dans l'Arithmétique représentent des Cls les mots ou les symboles:

N ou N_1 = « nombre entier positif »

Np = « nombre premier »

et par une convention générale:

a+N = « a plus un N » ou « nombre plus grand que a »

$a \times N = N \times a =$ « multiple de a »
$N^2 =$ « nombre carré »
$N^2 + N^2 =$ « somme de deux carrés ».

Dans F1899 indiquent aussi des Cls les symboles simples n R r infn ϑ Sgm Q q θ Θ pnt vct quaternio.

Leibniz prend pour exemples les classes de points, ou figures; elles sont des segments de droite dans PhilS. t.7, p.229, 236, ... et des cercles dans ses manuscrits conservés à la bibliothèque de Hannover, *Philosophie,* t.7 fasc. B.4. fol.1-3.

Ces figures ont été aussi adoptées par Euler, a.1768, et par d'autres.

·4 ε

Soit a une Cls; $x \varepsilon a$ signifie "x est un a".

ε est la lettre initiale du mot ἐστί.

Exemples: $9 \varepsilon N^2$ $13 \varepsilon N^2+N^2$ $2^{31}-1 \varepsilon$ Np

Sur la possibilité de remplacer le signe ε par une autre convention voir F1897 note à la P2.

P signifie "proposition". Ce signe n'est pas un symbole de logique, car il ne se trouve pas dans les formules ; il est une simple abréviation.

Les P catégoriques ne sont pas l'objet du calcul logique.

·5 ɜ

Soit p une P contenant une lettre x; la formule xɜp représente "la classe des x qui satisfont à la condition p".

On peut lire le signe ɜ par le mot « qui ».

Exemple: 1ε xɜ$(x^2-3x+2=0)$

« l'unité est une racine de l'équation entre parenthèses ».

Autres ex.:

§quot P1·0 §Dvr P1·0 §mp P2·6 §ϑ P·0 §Med P1·0 §λ P1·0 §q' P4·0...

Dans la formule xɜp, la lettre x est apparente.

Les deux signes $x\varepsilon$ et xɜ représentent des opérations inverses.

Si l'on écrit le signe $x\varepsilon$ en avant d'une Cls on a une P contenant la variable x; réciproquement si l'on écrit le signe xɜ en avant d'une P de cette nature, on obtient une Cls.

Les Cls et les P conditionelles ne sont donc que deux formes pour représenter la même idée. Nous préférons opérer sur les Cls. Une P conditionnelle, contenant une variable x, sera considérée sous la forme $x \varepsilon a$, où a est une Cls.

·6 ;

$(x;y)$ ou (x,y) indique le couple, ou système des objets x et y.

Dans la notation (x,y), très répandue en Analyse lorsqu'il s'agit de

fonctions de plusieurs variables, les parenthèses sont nécessaires, pour ne pas produire des ambiguïtés avec la notation P2·0.

On peut les supprimer dans la notation $(x;y)$, où les parenthèses ont la valeur expliquée par la P1·2.

$x;y;z$ indique le système des trois variables x, y, z, qu'on peut considérer comme le couple formé par $(x;y)$ et z. Voir P7·1.

Soit p une P contenant deux variables x et y; $(x;y)\ni p$ représente la classe des couples $(x;y)$ qui satisfont à la condition p.

Si a est une Cls de couples, $(x;y)\varepsilon a$ représente une relation entre les deux objets x et y, et toute relation entre les deux variables sera ici écrite sous la forme $(x;y)\,\varepsilon\, a$.

Ex: $(2/5\,;3/5)\ \varepsilon\ (x;y)\ni(x^2+y^2=1)$

signifie « le couple (2/5 ; 3/5) satisfait à l'équation $x^2+y^2=1$ ».

·7 $\supset$

Soient a et b des Cls. $a\supset b$ signifie « tout a est b ».

Soient p et q des propositions contenant une variable x;

$$p\,.\supset_x.\, q,$$

signifie " de p on déduit, quel que soit x, la q ", c'est-à-dire: " les x qui satisfont à la condition p satisferont aussi à la q ".

Si les propositions p et q contiennent deux variables x, y,

$$p\ .\supset_{x,y}.\ q$$

signifie: " tout système x,y qui satisfait à la condition p est aussi une solution de la condition q ".

Et ainsi de suite pour un plus grand nombre de variables.

On sous-entend les indices au signe $\supset$, lorsqu'il n'y a pas d' ambiguïté à craindre.

La P $a\supset b$, qu'on peut aussi lire « la classe a est contenue dans la b », est dite « universelle affirmative ».

Aristote a exprimé la relation $a\supset b$ par une périphrase (Voir P2·4); Leibniz par « a est b », et par $a \,|\!\!\overline{\ \ }\, b$. Segner a. 1740 et Lambert a. 1765 respectivement par $a<b$ et $a>b$; car le signe $\supset$ correspond au signe $<$ ou $>$, ou mieux à $\leq$ ou $\geq$, de l'Algèbre, selon que dans la classe on considère le nombre des individus qui la composent, ou le nombre des idées qui la déterminent.

Le signe $\supset$, qu'on peut lire « est contenu », est une déformation de ɔ, lettre initiale renversée du mot « contient ».

Il a été introduit par Gergonne a.1816. Voir RdM t.6 p.183.

Les signes ε et $\supset$ ont des propriétés différentes; la relation $\supset$ est transitive, la ε ne l'est pas (P2·4); la ε est distributive par rapport à $\cup$, la $\supset$ ne l'est pas (§$\cup$ P4·0); la ε est commutable avec $-$, la $\supset$ ne l'est pas (§$-$ P1·5). Une autre différence est donnée par §$\exists$ P1·1. Les signes ε et $\supset$ sont liés par des relations, dont la plus importante est §ι P·2.

Dans la formule $p \supset q$, p s'appelle Hypothèse, abrégé en Hyp ou Hp, et q la thèse, abrégé en Ths.

On sous-entend les indices à $\supset$, lorsqu'il est le seul signe de déduction; ou lorsqu' il représente la déduction principale, qui porte le plus grand nombre de points à ses côtés; ou si le théorème a la forme $p \supset (q \supset r)$. Les indices sous-entendus sont toutes les variables réelles contenues dans l'Hp.

Les lettres qui, exprimées ou sous-entendues, figurent comme indices au signe $\supset$ sont apparentes dans la déduction.

Opérer par $x\varepsilon$ sur la P universelle $a \supset b$
signifie la transformer dans la déduction $x\varepsilon a \,.\supset_x .\, x\varepsilon b$
« de la condition $x\varepsilon a$ on déduit par rapport à x la $x\varepsilon b$ ».

Opérer par $x\ni$ sur la déduction $p \,.\supset_x .\, q$
signifie la transformer dans la P universelle $(x\ni p) \supset (x\ni q)$

Ex. $6N \supset 2N$ « tout multiple de 6 est pair ».

Opérons par $x\varepsilon$; on a : $x\varepsilon\, 6N \,.\supset.\, x\varepsilon\, 2N$,
où l'indice x au signe $\supset$ est sous-entendu.

Ex. $a \,\varepsilon\, Np \,.\supset.\, (a-1)!+1 \,\varepsilon\, N \times a$

Le signe $\supset$ se rencontre aussi entre P, sans porter des indices, P5·01.

Quelquefois, dans les démonstrations, le signe $\supset$ lie deux théorèmes, et ne porte pas d'indices. Il est alors une abréviation du mot « on déduit ». Cette abréviation se rencontre sous la forme ∴ dans Pell (v. RdM t.6 p.123), et sous la forme ɔ dans Abel t.1 p.36. Dans ce cas on peut considérer les signes des idées primitives comme indices à $\supset$.

Dans le F, lorsqu'on rencontre l'expression $x\varepsilon a$, a est toujours une Cls. Analoguement dans la formule $a \supset b$, si un membre est une Cls, l'autre l'est aussi. On pourrait remplacer la P·4 par « $x \,\varepsilon\, a$ signifie a est une Cls, et x est un a », c'est-à-dire ajouter la P:

$x \,\varepsilon\, a \,.\supset.\, a \,\varepsilon$ Cls | F1889 P52 |

Voir Padoa RdM t.6 p.105.

·8 $\frown$

La Cls commune aux Cls a et b est indiquée par $a \frown b$ ou par ab.

L'affirmation simultanée des propositions p et q est indiquée par $p \frown q$, ou par pq.

Pour supprimer des parenthèses on convient que :
$pq \supset r$ signifie $(pq) \supset r$, et $p \supset qr$ signifie $p \supset (qr)$.
$p. \supset q$ et $p \supset . q$ signifient $p \,.\supset.\, q$.

Le signe $\frown$, qu'on peut lire « *et* », et qu'on appelle signe de la multiplication logique, est en général sous-entendu entre des P.

Ex. $(2N) \frown (3N) \supset 6N$ $\qquad 6N \supset (2N) \frown (3N)$

$Np \frown (4N+1) \supset N^2 + N^2$ Girard a. 1634 p. 156 :

« Tout nombre premier qui excede un nombre quaternaire de l'unité se peut diviser en deux quarrez entiers. »

$a \varepsilon N . \supset . a(a+1) \varepsilon 2N . a(a+1)(a+2) \varepsilon 6N$

$a \varepsilon N . a^2 \varepsilon N^2 . \supset . a \varepsilon N^2$ $a \varepsilon N . a < 17 . \supset . a^2 - a + 17 \varepsilon Np$

Dans ces ex. l'indice a au signe $\supset$ est sous-entendu.

$a \varepsilon Np . b \varepsilon N+1 . \supset . b^{a-1} - b \varepsilon N \times a$ | Fermat |

Ici le signe $\supset$ porte les indices sous-entendus a et b.

Ex. où $\supset$ a des indices explicites :

$s \varepsilon Cls . 1 \varepsilon s : x \varepsilon s . \supset_x . x+1 \varepsilon s :\supset . N \supset s$ (principe d'induction)

§+ 2·5 §n 1·2 2·0 §R 1·2 3·0 §r 2·1·2·5·6·9 §Num ·11 §mlt 1·0 §mp 1·5 ...

·9 **=**

$x = y$ signifie "x est égal à y".

Le signe d'égalité a la forme ∝ ou ∞, déformation de la lettre initiale de *æqualis*, de Viète à Leibniz; la forme =, qu'on rencontre dans Record a.1552, adoptée par Wallis et Newton, est devenue ensuite d'usage universel.

La plus grande partie des propositions contenues dans le Formul. s'exprime par les seuls signes de logique ε, $\supset$, et $\cap$ (sous-entendu), combinés avec les signes algébriques.

Le symbole Cls nous est nécessaire dans les propositions de Logique; le signe ɜ nous explique le double rôle du signe $\supset$ entre classes et entre propositions; le système de variables se rencontre comme indice au signe $\supset$.

Définitions

Df signifie « définition ».

Df? » « définition possible ».

Supposons ordonnés les signes qui représentent les idées d'une science. La définition symbolique d'un signe simple x a la forme

$x =$ (expression composée par les signes précédents) Df

Ont cette forme les Df des individus : 1, 2, 3, ... , ∞, e, C, i, π, et des Cls : N_1, n, R, r, infn, Np, ϑ, Sgn, Q, q, q'.

Si l'on définit une expression contenant des lettres variables, et s'il faut d'abord limiter la signification des lettres, la Df a une Hp.

Ont une Hp les Df de + — × / ↾ > Num Σ Π ! mod max quot rest Dvr mlt Cmb mp Φ l' Log E β Med λ lim sin D $\int$ ...

Une Df considérée en elle même, sans s'occuper de sa place dans une théorie, est une égalité, dont le premier membre contient un signe qui ne figure pas dans le second, ou qui y figure dans une position différente.

Df? marque les égalités qui ont la forme que nous venons d'expliquer.

Ex: §N_1 ·5 §< 1·02 ·03 §R 1·01 §r 2·5·9 §↾ 1·1 §> 2·5·6 3·7 6·01 ...

Le signe Df? exprime donc une propriété intrinsèque d'une P; le signe Df une propriété relative à sa place dans une théorie.

Supposons fixé un ordre aux idées des sciences mathématiqnes. Une Df? qui contient dans un membre une idée, et dans l'autre des idées précé-

dentes, peut être prise comme Df réelle de la première. S'il y a plusieurs Df? qui remplissent à cette condition, on choisira la plus commode.

Les idées, dont la Df symbolique fait défaut, s'appellent « idées primitives » relativement à l'ordre fixé. Il y a nécessairement des idées primitives, car on ne peut pas définir la première idée, ni le signe $=$, qui figure dans toute définition.

Si l'on change l'ordre des idées d'une science, une P qui jouait le rôle de Df peut se transformer en une Df?; une idée, qui était primitive relativement au premier ordre, peut être définie, et réciproquement.

Il convient de donner aux idées d'une science un ordre tel que le nombre des idées primitives soit le plus petit possible.

Nous rencontrons trois idées primitives dans l'Arithmétique (§+P1); et trois dans la Géométrie (§ vct P1·0, 2·0 et 8·0).

Les idées primitives sont expliquées par le langage ordinaire, et sont déterminées par des Pp (P primitives) ; celles-ci jouent le rôle de définitions par rapport aux idées primitives, mais n'ont pas la forme.

On peut, si l'on veut, donner aux Pp la forme des définitions symboliques. P. ex. au lieu de prendre comme idées primitives dans l'Arithmétique les idées représentées par les signes $0, N_0, +$, et de les déterminer par 5 Pp (§ + 2·1-·5), on peut définir le système $(0, N_0, +)$ comme le système satisfaisant à ces 5 Pp.

Parmi les principales formes de Df symboliques qu'on rencontre dans le F, nous mentionnerons les définitions « par abstraction », où l'on définit l'égalité de la même fonction de deux variables, sans définir cette fonction. Ont cette forme les §Num ·0, §l' 2·0 §vct 7·3.

Ex. de Df « par induction »: §+ 4·1·2, 6·1·2.

Ex. de Df où les deux membres sont connus: § – P2·4.

Les deux membres de l'égalité qui constitue une Df doivent contenir les mêmes variables réelles. P. ex. la § - P1·41 : $a \varepsilon N . \supset . a-a = 0$ n'est pas une Df? ; elle le devient sous la forme :

$0 =$ « valeur constante de $a-a$, où $a \varepsilon N$ ».

Tout signe défini peut être supprimé, en le remplaçant par sa valeur donnée par la Df.

Démonstrations.

Dm signifie « démonstration ». En général les démonstrations sont renfermées entre [ ] .

Les démonstrations, dans les sciences mathématiques, sont composées d'une suite de propositions convenablement liées.

Ces P ne diffèrent des théorèmes que par leur moindre importance. Nous pouvons donc les exprimer complétement en symboles.

La liaison entre les P est indiquée dans le langage ordinaire par « on déduit », que nous traduirons par $\supset$. Elle est une forme de raisonnement.

Les lois de logique, contenues dans la suite, ont été en général trouvées en énonçant, sous forme de règles, les déductions qu'on rencontre dans les démonstrations mathématiques.

Parmi les règles plus importantes il y a le syllogisme, composer. exporter, importer, la substitution, et simplifier.

Soient p, q, r, s des propositions.

Syll, abréviation de Syllogisme, indique la forme

$$p \supset q \,.\, q \supset r \,.\supset.\, p \supset r \,.$$

Si les propositions sont réduites à la forme $x \varepsilon a$, où a est une Cls, le syllogisme est exprimé par la P2·4. Mais nous appliquerons le Syll même lorsqu'il s'agit de P non encore réduites à la forme $x \varepsilon a$.

Cmp (composer) indique la forme

$$p \supset q \,.\, p \supset r \,.\supset.\, p \supset qr \,.$$

Voir P3·4. En combinant les raisonnements Cmp et Syll, on a la forme:

P3·61 $\qquad p \supset q \,.\, p \supset r \,.\, qr \supset s \,.\supset.\, p \supset s \,.$

Importer signifie passer de la proposition $p \supset . q \supset r$ à la $pq \supset r$.

En réunissant les hypothèses, on réunit aussi les indices au signe $\supset$.

Exporter indique la transformation inverse. Voir P7·3.

Par ex. soit la P : $\quad a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} \times a \,.\, c \varepsilon \mathrm{N} \times b \,.\supset.\, c \varepsilon \mathrm{N} \times a$

où le signe $\supset$ porte les indices sous-entendus a,b,c.

Export $.\supset:$ $\quad a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} \times a \,.\supset:\, c \varepsilon \mathrm{N} \times b \,.\supset_c .\, c \varepsilon \mathrm{N} \times a$

Opérons par $c \ni$: $\quad a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} \times a \,.\supset.\, \mathrm{N} \times b \supset \mathrm{N} \times a.$

La substitution consiste à remplacer dans un théorème α de la forme $p \supset_{x,y \ldots} q$, les lettres variables $x, y, \ldots$ par des expressions constantes ou variables $a, b \ldots$; on désigne par

$$(a, b, \ldots) \mid (x, y, \ldots) \,\mathrm{P}\alpha$$

la nouvelle P. Le signe | sera étudié dans son §.

Toute P doit être écrite sous sa forme la plus simple. Si l'on effectue une substitution dans une P, il peut arriver que la nouvelle P ne se présente pas sous la forme plus simple ; il faut la simplifier comme suit :

a) Si l'Hp ne contient plus de lettres variables, et si elle est vraie, on la supprime, et l'on affirme la Ths.

P. ex. soit la P $\quad x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\supset.\, (x-1)!+1 \,\varepsilon\, \mathrm{N} \times x \qquad (\alpha)$

$(11 \mid x)\mathrm{P}\alpha \,:\supset:$ $\quad 11 \varepsilon \mathrm{Np} \,.\supset.\, 10!+1 \,\varepsilon\, \mathrm{N} \times 11$

Simplif $.\supset.$ $\quad 10!+1 \,\varepsilon\, \mathrm{N} \times 11.$

b) Si dans l'Hp il y a comme facteur logique une P vraie, on la supprime.

Ex. De la P: $\quad a,b \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset.\, (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad (\alpha)$

$(1 \mid b)\mathrm{P}\alpha$. Simplif $.\supset:$ $\quad a \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset.\, (a+1)^2 = a^2+2a+1.$

Si l'on exporte la P vraie, la règle *b*) est conséquence de la *a*).

c) Réciproquement on peut unir à l'Hp des P vraies.

Soit α un théorème : $\quad \mathrm{Hp} \,.\, \alpha \,.\supset.\, \mathrm{Ths}$ $\quad$ est donc une forme abrégée de

$$\alpha \,.\supset:\, \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mathrm{Ths}.$$

d) Si dans l'Hp il y a comme facteur logique une P conséquence des autres, on la supprime.

e) Si dans l'Hp il y a un facteur logique non nécessaire, on le supprime.

f) Réciproquement on peut ajouter à l'Hp des facteurs non nécessaires ; cela revient à dire que de l'affirmation simultanée de plusieurs propositions, on peut déduire l'affirmation de chaque proposition. Voir P3·3.

D'autres formes de raisonnement seront indiquées par un nom :

Distrib(ε,∩)	Oper∩	Comm∩	Assoc∩	Distrib(∩,⊃)	Distrib(ɜ,∩)
P3·1	3·5	4·2	4·3	5·3	6·2
Distrib(ε,∪)	Oper∪	Comm∪	Assoc∪	Distrib(∩,∪)	Distrib(ɜ,∪)
§∪ 4·0	1·5	2·2	2·3	3·1	4·1
Transp	Oper∃	Eliminer.			
§− 2·3·4·7 4·2	§∃ 1·21	2·1			

Les P de logique sont en général évidentes. Les démonstrations n'ont pas pour but de nous assurer de la vérité de ces P, mais seulement de réduire plusieurs de ces modes de raisonnement à d'autres plus simples.

Dans le Formul. une démonstration est réduite à une suite de transformations, suivant des régles mentionnées, de l'Hp dans la Ths. Ces transformations sont analogues aux règles algébriques pour résoudre un système d'équations.

En supposant ordonnées les P d'une science, une Dm doit déduire une P des précédentes. Une P peut avoir plusieurs démonstrations ; il peut arriver qu'il convienne déduire d'une P une autre précédente ; on pourrait appeler « démonstrations possibles » ces déductions ; elles déviennent des démonstrations si l'on change l'ordre des P. Ex.: §∪ P2·6, §ι 1·61.

Les P dont la Dm manque, s'appellent Pp (propositions primitives). Si dans une science il y a des idées primitives, il y aura aussi des Pp, qui fixent la valeur des premières.

Une P est primitive, si l'on ne l'a pas démontrée. Dans plusieurs cas on prouve qu'un système de n Pp est irréductible ; pour ce but on donne aux idées primitives n interprétations différentes de la réelle, et telles que chacune satisfasse à toutes des Pp, une à la fois exceptée. Voir §+ et §vct.

Dans quelque cas on prouve seulement que chaque Pp est indépendante des précédentes ; on prouve l'indépendence ordonnée. Voir Pieri TorinoM a.1898 t.48 p.60.

✱ 2. ⊃ ε

·0 $a \varepsilon$ Cls .⊃: $x,y \varepsilon a$.=. $x \varepsilon a$. $y \varepsilon a$ Df

« Soit a une classe ; nous écrirons $x,y\varepsilon a$, qu'on lira "x et y sont des a", au lieu de $x\varepsilon a$. $y \varepsilon a$ ».

La formule $x,y,z\varepsilon a$ signifie $x,y\varepsilon a$. $z\varepsilon a$ " x et y sont des a, z est un a ,, , qu'on lira " x, y, z sont des a ,,; et ainsi de suite quel que soit le nombre des sujets.

Ex. $2^2-1,\ 2^3-1,\ 2^5-1\ \varepsilon$ Np

$a,b \varepsilon$ N .⊃. $ab = ba$. $a^2+b^2 \geqq 2ab$

·1 $a,b \varepsilon$ Cls .⊃∴ $a ⊃ b$.=: $x\varepsilon a$.⊃$_x$. $x \varepsilon b$ Df? { F1889 P50 }
{ Oper $x\varepsilon$ } { Oper $x\text{ɜ}$ }

Cette P relie les deux fonctions du signe ⊃ entre Cls et entre P, et exprime les règles « opérer par $x\varepsilon$, ou par xɜ ». Voir P1·7.

Si l'on considére le signe ⊃ entre P comme une idée primitive, la P·1 définira le même signe entre Cls.

Réciproquement on pourrait essayer de prendre comme idée primitive la valeur du signe $\supset$ entre Cls, et d'en déduire la valeur entre les conditions $x\varepsilon a$ $x\varepsilon b$ par la même P·1. Mais cette P contient déjà le signe $\supset$ avec la signification « on déduit » entre l'Hp et la Ths.

·2 $a\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset. a\supset a$ | LEIBNIZ voir P3·3 |

·3 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset b . x\varepsilon a .\supset. x\varepsilon b$ | F1889 P55 |

[P·1 $.\supset.$ $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset b .\supset: x\varepsilon a .\supset_x . x\varepsilon b$ (1)
(1) . Import $.\supset.$ P]

Appelons p et q les conditions $x\varepsilon a$ $x\varepsilon b$. Par la Df P·1, la P·3 devient: $p\supset q . p .\supset. q$ « si de p on déduit q, et la p est vraie, sera vraie la q ».
Cette forme de raisonnement est une espèce de syllogisme.

·4 $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset b . b\supset c .\supset. a\supset c$ | Syll |

| ARISTOTELES, *Analytica Priora*, lib. I, cap. IV:
« *Εἰ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Β, καὶ τὸ Β κατὰ παντὸς τοῦ Γ, ἀνάγκη τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Γ κατηγορεῖσθαι.* » |

| LEIBNIZ Mss. *Philosophie* VIIB·4 fol.17:
« Nota Γ aut vox *est*. *e*Γ*d* sive *d*⅂*e*. Si *e*Γ*d* et *d*Γ*a* tunc *e*Γ*a*. » |

Cette P exprime le « syllogisme » abrégé en Syll.
Soit xay une relation entre les objets x et y. Elle est dite « transitive » si $xay . yaz .\supset. xaz$.
Le Syll dit que la relation $\supset$ est transitive. La relation ε ne l'est pas. P. ex. de $7\varepsilon \mathrm{Np}$
et $\mathrm{Np}\,\varepsilon$ (ensemble infini illimité dénombrable)
on ne peut pas tirer de conséquence. On dit que ε a le sens composé (sensus compositi), et $\supset$ le sens divisé (sensus divisi). $x\varepsilon a$ dit que a est une propriété de x; $x\supset a$ dit que a est une propriété des individus de la classe x.

·5 $a,b,c,d\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset b . b\supset c . c\supset d .\supset. a\supset d$
[Hp . Syll $.\supset.$ $a\supset c . c\supset d$. Syll $.\supset.$ Ths]

·6 $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: a\supset b\supset c .=. a\supset b . b\supset c$ Df

Cette abréviation se rencontre dans quelques démonstrations.

✱ 3. $\supset \frown$

·0 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: ab = a\frown b : x\varepsilon ab .=. x\varepsilon (ab)$
$a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: abc = (ab)c :$
$ab = c .=. (ab) = c : a = bc .=. a = (bc) :$
$ab\supset c .=. (ab)\supset c : a\supset bc .=. a\supset (bc)$ Df

Ces conventions ont pour but de sous-entendre le signe $\frown$ et des parenthèses.

·1 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: x\varepsilon a\frown b .=. x\varepsilon a .\frown. x\varepsilon b$ Df? | Distrib($\varepsilon, \frown$) |
| F1889 P47 |

Cette égalité est une Df? (définition possible), car le signe $\cap$ figure dans le premier membre entre Cls, et dans le second entre P. Si l'on suppose connue sa valeur entre P, on en déduira la valeur de la formule $x \varepsilon ab$; mais pour avoir dans le premier membre ab seul, il est encore nécessaire la transformation indiquée par la P6·2.

Réciproquement si l'on considère comme une idée primitive le produit ab de deux Cls, on déduira la valeur du produit logique entre les P $x \varepsilon a$ et $x \varepsilon b$. Mais l'Hp $a,b \varepsilon$ Cls, par la P2·0 est déjà le produit logique de deux P.

Soient $x\alpha y$ et $x\beta y$ deux fonctions de x,y. L'opération α est dite distributive par rapport à la β, si l'on a

$$x\alpha(y\beta z) = (x\alpha y)\beta(x\alpha z) \qquad \{\text{Distrib}(\alpha,\beta)\}$$

Le signe à droite indique le théorème qui exprime cette propriété.

P. ex. l'opération arithmétique $\times$ est distributive par rapport à $+$.

L'opération ε, dont le résultat est une P, est donc distributive par rapport à $\cap$.

Ex. De la P : $\quad \text{Np} \cap (4\text{N}+1) \supset \text{N}^2+\text{N}^2$

Opér $x\varepsilon$. Distrib($\varepsilon, \cap$) .$\supset$: $\quad x \varepsilon \text{Np} . x \varepsilon 4\text{N}+1 .\supset. x \varepsilon \text{N}^2+\text{N}^2$.

·2 $\quad a,b \varepsilon \text{Cls} .\supset. ab \varepsilon \text{Cls}$ $\qquad$ { F1897 P22 }

·3 $\quad a,b \varepsilon \text{Cls} .\supset. ab \supset a$ $\qquad$ ·31 $\quad$ Hyp P·3 $.\supset. ab \supset b$

{ LEIBNIZ, Specimen calculi universalis, *PhilS.* t.7 p.218:
« *a* est *a* » « *ab* est *a* » « *ab* est *b*. »}

·4 $\quad a,b,c \varepsilon \text{Cls} . a \supset b \;\; a \supset c .\supset. a \supset bc$ $\qquad$ { Cmp }

{ LEIBNIZ Id. p.222:

« Diversa praedicata in unum conjungi possunt, ut si constet *a* esse *b*, itemque aliunde constet *a* esse *c*, poterit dici *a* esse *bc*. » }

Elle exprime la forme de raisonnement dite « composer » (Cmp).

·5 $\quad a,b,c \varepsilon \text{Cls} . b \supset c .\supset. ab \supset ac$ $\qquad$ { Oper $\cap$ }

{ LEIBNIZ Id. p.222:

« Si *b* est *c*, tunc *ab* erit *ac*. Quod ita demonstratur: *ab* est *b*, *b* est *c*, ergo *ab* est *c*, per regulam consequentiarum primam. *ab* est *c*, *ab* est *a*, ergo *ab* est *ac* per demonstrata supra. »}

[$a,b,c \varepsilon \text{Cls} . b \supset c$. P·31 $.\supset. ab \supset b . b \supset c$. Syll $.\supset. ab \supset c$ $\qquad$ (1)

» $\quad$ » $\quad$ » . P·3 . (1) $.\supset. ab \supset a . ab \supset c$. Cmp $.\supset. ab \supset ac$]

Cette P, analogue à §> P4·1, s'appelle « opérer par $\cap$ ».

La démonstration est la traduction exacte de celle donnée par Leibniz. Nous voulons décomposer les différentes déductions, qui sont complexes, dans les formes simples. On verra par cet exemple comment cette décomposition soit longue.

Hp signifie « hypothèse du théorème »; dans notre cas: $a,b,c \varepsilon \text{Cls} . b \supset c$.

Simplifier par la P3·3 signifie répéter la première de deux affirmations; simplifier par la P3·31 signifie répéter la deuxième.

Nous commençons à décomposer l'Hp en affirmations simples :

Simpl (P3·3) $.\supset:$	Hp $.\supset.\ a,b,c\varepsilon$ Cls	(α)
Simpl (P3·31) $.\supset:$	Hp $.\supset.\ b\supset c$	(β)
Simpl (P3·3) $.\supset:$	$a,b,c\varepsilon$ Cls $.\supset.\ a,b\varepsilon$ Cls	(γ)
$(\alpha).(\gamma)$. Syll $.\supset:$	Hp $.\supset.\ a,b\varepsilon$ Cls	(δ)
Simpl (P3·31) $.\supset:$	$a,b,c\varepsilon$ Cls $.\supset.\ c\varepsilon$ Cls	(ε)
$(\alpha).(\varepsilon)$. Syll $.\supset:$	Hp $.\supset.\ c\varepsilon$ Cls	(ς)
Simpl (P3·3) $.\supset:$	$a,b\varepsilon$ Cls $.\supset.\ a\varepsilon$ Cls	(ζ)
$(\delta).(\zeta)$. Syll $.\supset:$	Hp $.\supset.\ a\varepsilon$ Cls	(η)
Simpl (P3·31)	$a,b\varepsilon$ Cls $.\supset.\ b\varepsilon$ Cls	(θ)
$(\delta).(\theta)$. Syll $.\supset:$	Hp $.\supset.\ b\varepsilon$ Cls	(ι)
P3·2 $.=:$	$a,b\varepsilon$ Cls $.\supset.\ ab\ \varepsilon$ Cls	
(δ). P3·21 . Syll $.\supset:$	Hp $.\supset.\ ab\ \varepsilon$ Cls	$(\iota\alpha)$
$(\iota\alpha).(\theta)$. Cmp $.\supset:$	Hp $.\supset.\ ab;b\ \varepsilon$ Cls	$(\iota\beta)$
$(\iota\beta).(\varsigma)$. Cmp $.\supset:$	Hp $.\supset.\ ab,b,c\ \varepsilon$ Cls	$(\iota\gamma)$
P3·31 $.=:$	$a\varepsilon$ Cls $.\supset.\ ab\supset b$	
(δ). P3·31 . Syll $.\supset:$	Hp $.\supset.\ ab\supset b$	$(\iota\delta)$
$(\iota\gamma).(\iota\delta)$. Cmp $.\supset:$	Hp $.\supset.\ ab,b,c\varepsilon$ Cls $.\ ab\supset b$	$(\iota\varepsilon)$
$(\iota\varepsilon).(\beta)$. Cmp $.\supset:$	Hp $.\supset.\ ab,b,c\varepsilon$ Cls $.\ ab\supset b\ .\ b\supset c$	$(\iota\varsigma)$
$(ab,b,c)\vert(a,b,c)$Syll $.\supset:$	$ab,b,c\varepsilon$ Cls $.\ ab\supset b\ .\ b\supset c\ .\supset.\ ab\supset c$	$(\iota\zeta)$
$(\iota\varsigma).(\iota\zeta)$. Syll $.\supset:$	Hp $.\supset.\ ab\supset c$	$(\iota\eta)$
P3·3 $.=:$	$a,b\varepsilon$ Cls $.\supset.\ ab\supset a$	
(δ). P3·3 . Syll $.\supset:$	Hp $.\supset.\ ab\supset a$	$(\iota\theta)$
$(\iota\alpha).(\eta)$. Comp $.\supset:$	Hp $.\supset.\ ab,a\varepsilon$ Cls	$(\varkappa)$
$(\varkappa).(\varsigma)$. Comp $.\supset:$	Hp $.\supset.\ ab,a,c\varepsilon$ Cls	$(\varkappa\alpha)$
$(\varkappa\alpha).(\iota\theta)$. Cmp $.\supset:$	Hp $.\supset.\ ab,a,c\varepsilon$ Cls $.\ ab\supset a$	$(\varkappa\beta)$
$(\varkappa\beta).(\iota\alpha)$. Cmp $.\supset:$	Hp $.\supset.$ » » $.\ ab\supset c$	$(\varkappa\gamma)$
$(ab,a,c)\vert(a,b,c)$Cmp $.\supset:$	$ab,a,c\varepsilon$ Cls $.\ ab\supset a\ .\ ab\supset c\ .\supset.\ ab\supset ac$	$(\varkappa\delta)$
$(\varkappa\gamma).(\varkappa\delta)$. Syll $.\supset:$	P	

·6 $a,b,c,d\varepsilon$ Cls $.\ a\supset b\ .\ d\supset c\ .\supset.\ ad\supset bc$

{ LEIBNIZ Id. p.223:

« Si *a* est *b*, et *d* est *c*, tunc *ad* erit *bc*. Hoc est praeclarum theorema, quod demonstratur hoc modo:
a est *b*, ergo *ad* est *bd* per priora,
d est *c*, ergo *bd* est *bc* rursus per priora,
ad est *bd*, et *bd* est *bc*, ergo *ad* est *bc*. Quod erat demonstrandum. » }

{ MCCOLL a.1878 P9 }

[Hp . P·5 $.\supset.\ ad\supset bd\ .\ bd\supset bc\ .\supset.$ Ths]

·61 $a,b,c,d\varepsilon$ Cls $.\ a\supset b\ .\ a\supset c\ .\ bc\supset d\ .\supset.\ a\supset d$ {F1897 P35}

[Hp . Cmp $.\supset.\ a\supset bc\ .\ bc\supset d$. Syll $.\supset.$ Ths]

·62 ———————$.\ ab\supset c\ .\ ac\supset d\ .\supset.\ ab\supset d$ {F1897 P37}

[Hp $.\supset.\ ab\supset ac\ .\ ac\supset d\ .\supset.$ Ths]

·63 ———————$.\ a\supset b\ .\ bc\supset d\ .\supset.\ ac\supset d$ {F1895 P115}

[Hp $.\supset.\ ac\supset bc\ .\ bc\supset d\ .\supset.$ Ths]

·64 ————— . $a \supset bd \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \supset c$ { LEIBNIZ Id. p.218 }
[Hp . P·3 $.\supset.\ a \supset bd \,.\, bd \supset b \,.\, b \supset c \,.\supset.$ Ths]

✱ 4.

·0 $a,b \varepsilon$ Cls $.\supset:\ a = b \,.=.\, a \supset b \,.\, b \supset a$ Df?

{ LEIBNIZ *PhilS.* t.7 p.225 :
« Si *a* est *b*, et *b* est *a*, tunc *a* et *b* dicuntur esse idem.» }

{ McCOLL P7 : $(a=b)=(a:b)(b:a)$ }

Cette P exprime l'égalité de deux classes par le signe $\supset$. Le signe $=$ se rencontre nécessairement dans toute définition, et ne peut pas être défini. Si l'on veut considérer cette P comme une Df il faut regarder le deuxième signe $=$ comme lié avec le signe Df. Leur ensemble signifie « est égal par définition » ou « nous posons ». Il n'est plus le même signe qui figure dans $a=b$.

Ex : $(2N) \frown (3N) = 6N$

« les nombres multiples de 2 et multiples de 3 sont multiples de 6 ».

$$N \frown x \ni (3x-2 \,\varepsilon\, 5N) = 5N-1$$

« Les nombres x qui rendent $3x-2$ multiple de 5 s'obtiennent de la formule $5y-1$, en y remplaçant y par tous les N ».

·1 $a \varepsilon$ Cls $.\supset.\ a = aa$ { LEIBNIZ Mss. VII p.3 : « $AA \infty A$ » }
[$(a,a,a)|(a,b,c)$P3·4 . Simpl $.\supset:\ a \varepsilon$ Cls $.\supset.\ a \supset aa$ (1)
$(a|b)$P3·3 . Simpl $.\supset:\ a \varepsilon$ Cls $.\supset.\ aa \supset a$ (2)
(1) . (2) . Cmp . P·0 $.\supset.$ P]

·2 $a,b \varepsilon$ Cls $.\supset.\ ab = ba$ { Comm $\frown$ }

{ LEIBNIZ Mss. VIIB2 p.3 : « $AB \infty BA$ » }

Soit xay une fonction de x et y. L'opération a est dite commutative si l'on a $xay = yax$ { Comm a }

La P·2 exprime la commutativité de l'opération $\frown$.
[Hp . P3·3 . P3·31 $.\supset.\ ab \supset b \,.\, ab \supset a$. Cmp $.\supset.\ ab \supset ba$ (1)
Hp . $(b,a)|(a,b)$P(1) $.\supset.\ ba \supset ab$ (2)
(1) . (2) $.\supset.$ P]

·3 $a,b,c \varepsilon$ Cls $.\supset:\ a(bc) = (ab)c = abc$ { Assoc $\frown$ }

{ BOOLE a.1854 p.29 }

On dit que l'opération a est associative, si
$(xay)az = xa(yaz)$ { Assoc a }

L'opération $\frown$ est associative.
[Hp . P3·3 $.\supset.\ (ab)c \supset ab \,.\, ab \supset a \,.\supset.\ (ab)c \supset a$ (1)
» » » $.\ ab \supset b \,.\supset.\ (ab)c \supset b$ (2)
» » $(ab)c \supset c$. (2) . Cmp $.\supset.\ (ab)c \supset bc$ (3)
(1) . (3) . Cmp $.\supset.\ (ab)c \supset a(bc)$]

✱ 5.

Soient p, q, r des P contenant une variable, ou un système de variables x.

·0 $p .=_x. q$ signifie $p .\supset_x. q : q .\supset_x. p$.
·01 $p .\supset_x: q .\supset. r$ signifie $pq .\supset. r$.
·02 $p .\supset_x: q .=. r$ signifie $p .\supset_x: q .\supset. r : r .\supset. q$.

Ces P s'énoncent symboliquement :

·1 $a,b \varepsilon \text{Cls} .\supset\therefore x\varepsilon a .=_x. x\varepsilon b :=. a=b$ Df

·11 $a,b,c \varepsilon \text{Cls} .\supset:: x\varepsilon a .\supset_x: x\varepsilon b .\supset. x\varepsilon c \therefore=. ab\supset c$ Df

·12 $a,b,c \varepsilon \text{Cls} .\supset:: x\varepsilon a .\supset_x: x\varepsilon b .=. x\varepsilon c \therefore=. ab\supset c . ac\supset b$ Df

Dans la formule $p .=_x .q$, la lettre x est apparente. On sous-entend l'indice au signe $=$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre. Voir §1P3.

Ex. $a\varepsilon \text{Np} .=. a\varepsilon \text{N}+1 . (a-1)!+1 \varepsilon \text{N}\times a$

§— P1·3 §n P3·6 §/P1·3 §R P6·6 P14·1 §r P10·1-·3,·5-·8 ...

Dans ces exemples l'indice au signe $=$ est toujours sous-entendu.

Dans la formule $p .\supset_x : q .\supset. r$, le premier $\supset$ porte l'indice x qui peut être sous-entendu; le deuxième ne porte pas d'indice.

Des deux formes $p\supset.q\supset r$ et $pq\supset r$, la deuxième est plus simple, lorsqu'il s'agit d'une proposition seule; mais la première est plus commode lorsqu'on a une longue suite de propositions qui ont une Hp commune; alors on peut mettre en évidence cette Hp, et l'écrire une seule fois.

Ex.: §R P2·6·7 P11·2-·4.

La P·11 exprime, dans un cas particulier, la règle de l'exporter.

Ex. de la ·02: $a,b,c\varepsilon \text{N} .\supset: a=b .=. a+c=b+c$
$a,b\varepsilon \text{N} .\supset: a^2+b^2 \varepsilon 3\text{N} .=. a\varepsilon 3\text{N} . b\varepsilon 3\text{N}$

·2 $a,b\varepsilon \text{Cls} .\supset: a\supset b .=. a=ab$ Df?

{ LEIBNIZ *PhilS.* t.7 p.214: «Omne *A* est *B* id est *AB* ∞ *A*.» }

Cette P transforme $a\supset b$ en une égalité. Le signe $\supset$ y figure aussi pour pour séparer l'Hp de la Ths. Voir F1897 P52 note.

[$a,b\varepsilon \text{Cls} . a\supset b . \text{P2·2} .\supset. a\supset a . a\supset b . \text{Cmp} .\supset. a\supset ab$ (1)
$a,b\varepsilon \text{Cls} . a\supset b . (1) . \text{P3·3} .\supset. a\supset ab . ab\supset a . \text{P4·0} .\supset. a=ab$ (2)
» » $a=ab . \text{P3·31} .\supset. a\supset b$ (3)
(2) . (3) $.\supset.$ P]

·3 $a,b,c\varepsilon \text{Cls} .\supset: a\supset bc .=. a\supset b . a\supset c$ { Distrib($\supset$, ∩) }

{ MC COLL a.1878 P12: «$(x : \text{A}) (x : \text{B}) (x : \text{C}) = (x : \text{ABC})$.» }

[$a,b,c\varepsilon \text{Cls} . a\supset bc . \text{P3·3·31} .\supset. a\supset b . a\supset c$ (1)
(1) . Cmp $.\supset.$ P]

·4 $a,b,c\varepsilon \text{Cls} . ab\supset c . ac\supset b .\supset. ab=ac$ {F1897 P55}

[Hp $.\supset. ab\supset ac . ac\supset ab .\supset.$ Ths]

Ex. Appelons a, b, c les trois équations

$$x+y=m \qquad xy=n \qquad (x-y)^2=m^2-4n$$

Par des règles algébriques on a $ab \supset c$ $ac \supset b$; on déduit l'équivalence des systèmes ab et ac (mais non de ab et bc).

✱ 6.

·1 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, x \ni (x \varepsilon a) = a$ Df? {F1889 P58}

Cette égalité a le caractère d'une Df?, car le signe $\ni$ figure dans le premier membre et non dans le second. Mais, contrairement aux autres Df, le premier membre est plus compliqué que le second. Dans la pratique on écrit le signe $x\varepsilon$ en avant d'une P réductible, mais non réduite, à la forme $x \varepsilon a$.

·2 $a,b \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, a \frown b = x \ni (x \varepsilon a \,.\frown.\, x \varepsilon b)$ Df? { Distrib($\ni,\frown$) } {F1889 P60}

[P3·1 . Oper $x\ni$ $.\supset.$ P]

Cette P dit que l'opération $\ni$ est distributive par rapport à $\frown$.

·3 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, a = x \ni (u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset u \,.\supset_u.\, x \varepsilon u)$ {F1897 P61}

[P2·3 $.\supset$ $\quad a,u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset u \,.\, x \varepsilon a \,.\supset.\, x \varepsilon u$ (1)

(1) . Export $.\supset$ $\quad a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\!\cdot.\, x \varepsilon a \,.\supset_x :\, u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset u \,.\supset_u .\, x \varepsilon u$ (2)

(2) . Oper $x\ni$ $.\supset$ $\quad a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, a \supset x \ni ($ » » $)$ (3)

$a \varepsilon \mathrm{Cls} :\, u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset u \,.\supset_u .\, x \varepsilon u \,:\supset:\, a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset a \,:\supset:\, x \varepsilon a$ (4)

(4) . Export . Oper $x\ni$ $.\supset$ $\quad a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, x \ni (u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset u \,.\supset_u .\, x \varepsilon u) \supset a$ (5)

(3) . (5) $.\supset.$ P]

Ex. §$\smile$ 2·1 Dm . 2·6 Dm . §$-$ 3·8 Dm.

✱ 7.

·1 $(x;y;z) = [(x;y);z]$ Df {F1898 P70}

·2 $(x;y) = (a;b) \,.=.\, x=a \,.\, y=b$ Df? {F1897 P71}

Sur cette P voir RdM t.6 p.65, p.119.

·3 $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset::$

$x \varepsilon a \,.\supset_x :\, (x;y) \varepsilon b \,.\supset_y .\, (x;y) \varepsilon c \,.\!\cdot.\!=\!:\, x \varepsilon a \,.\, (x;y) \varepsilon b \,.\supset_{x,y} .\, (x;y) \varepsilon c$

{F1894 §18 P2; 1897 P74}

Considérons une condition contenant une variable x, et deux conditions contenant deux variables x et y. Nous écrirons la première sous la forme $x \varepsilon a$; où a est une Cls; et les deux dernières sous la forme $(x;y) \varepsilon b$ et $(x;y) \varepsilon c$, où b et c sont des Cls de couples. Alors la déduction

$$x \varepsilon a \,.\, (x;y) \varepsilon b \,.\supset_{x,y} .\, (x;y) \varepsilon c$$

est identique à la

$$x \varepsilon a \,.\supset_x :\, (x;y) \varepsilon b \,.\supset_y .\, (x;y) \varepsilon c$$

La P·3 est l'expression simbolique de règles « exporter » et « importer »

dont nous avons parlé dans les « démonstrations ». Un cas particulier est la P5.11.

Ex. dans les Dém. des §R P2·1 §λ P1·2 §Lm P1·1 1·4

·4 $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset::$

$x \varepsilon a \,.\supset_x:\ y \varepsilon b \,.\supset_y.\ (x,y) \varepsilon c \ .\!\cdot\!.=.\!\cdot\!.\ y \varepsilon b \,.\supset_y:\ x \varepsilon a \,.\supset_x.\ (x,y) \varepsilon c$

{ PEIRCE a.1880 p.24 : |x ⤙(y ⤙z)| = |y ⤙(x ⤙z)| . }

·5 $a,b,c,d \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset::$

$x \varepsilon a \,.\supset_x:\ y \varepsilon b \,.\ (x;y) \varepsilon c \,.\supset_y.\ (x;y) \varepsilon d \ .\!\cdot\!.=.\!\cdot\!.$

$y \varepsilon b \,.\supset_y:\ x \varepsilon a \,.\ (x;y) \varepsilon c \,.\supset_x.\ (x;y) \varepsilon d$

[Import . Export $.\supset.$ P]

D'autres identités où figurent des relations entre plusieurs variables son contenues dans §∃ P2.

✱ 8.

·1 $x=x$ { Ex. §+ 3·1 }

·2 $x=y \,.\supset.\ y=x$

·3 $x=y \,.\ y=z \,.\supset.\ x=z$

Ces trois propriétés de l'égalité sont indépendentes. Voir §vct P2·1·2·3.

Si l'on suppose vérifiées les ·2·3, et que, étant donné un objet x, il en existe un autre y tel que $x=y$, P·2 $\supset$ $y=x$, P·3 $\supset$ P·1.

Voir Vailati RdM. t.1 p.127, t.2 p.161, et De Amicis RdM. t.2 p.113.

Il y a des relations, différentes de l'égalité, et qui satisfont aux conditions ·1·2·3.

Sont telles les relations géométriques :

« la droite x est parallèle à la y »

« la figure x est superposable à la y »

« la figure x est semblable, ou projective, à la y ».

Voir F1894 §39.

Si l'équation $f(x,y)=0$, où le premier membre est une fonction algébrique entière des nombres x et y, exprime entre ces variables une relation ayant les propriétés ·1·2·3, elle est réductible à la forme $\mathrm{F}x = \mathrm{F}y$, où F est une fonction rationnelle. Voir IdM. a.1900 p.37.

·4 $x=y=z \ .=.\ x=y \,.\ y=z$ Df

exprime une abréviation très connue.

·5 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\ x \varepsilon a \,.\ y=x \,.\supset.\ y \varepsilon a$ { F1895 §4 P10 }

·6 $x=y \ .=:\ a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\ x \varepsilon a \,.\supset_a.\ y \varepsilon a$ Df? { F1897 P80 }

{ LEIBNIZ Id. p.219: « Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate. » }

L'égalité $x=y$ signifie « toute classe qui contient x contiendra aussi y », ou « toute propriété de x est une propriété de y »; ou « la vérité de la proposition $x \varepsilon a$, qui contient x, n'est pas altérée si l'on remplace x par y. »

Cette P est une Df?, car le second membre ne contient pas le signe = qui figure dans le premier. La difficulté qu'on rencontre à la considérer comme une Df réelle, que le signe = sert déjà dans la définition, peut être écartée par la remarque à la P4·0.

La P·6 ne donne pas toute la signification de $x = y$, car on doit encore définir cette égalité pour les nombres négatifs, rationnels §n1·2 §R1·2, dans les Df par abstraction ; de P·1 on ne peut pas tirer la P4·0. V. F1897 p.39.

Dans les traités d'Arithmétique on a les P

2/3 = 4/6 2/3 est une fraction irréductible 4/6 ne l'est pas

ce qui paraît en contradiction avec la P·5. Ici le signe 2/3 représente d'abord un nombre rationnel, ensuite l'ensemble des trois signes 2 / 3.

·61 Dm P·1 $a\varepsilon$ Cls . $x\varepsilon a$. Simplif .⊃. $x\varepsilon a$: P·6 :⊃. P

·62 Dm P·2 P·1 .⊃. $x\varepsilon\ z\ni(z=x)$. P·6 .⊃. $y\varepsilon\ y\ni(z=x)$.⊃. P

·63 Dm P·3 Hp .⊃: $a\varepsilon$ Cls . $x\varepsilon a$. P·6 .⊃. $y\varepsilon a$. P·6 .⊃. $z\varepsilon a$:⊃. Ths

·64 Dm P·5 P·6 . Import .⊃. P | F1897 P80-84 |

§2 ∪

✱ 1.

·0 $a,b\varepsilon$ Cls .⊃. $a\cup b = x\ni(c\varepsilon \text{ Cls} . a\supset c . b\supset c .\supset_c . x\varepsilon c)$ Df
|F1897 P241|

$a\cup b$, qu'on peut lire « a ou b » indique donc la classe des objets qui appartiennent à l'une, au moins, des classes a et b.

L'opération indiquée par le signe ∪ s'appelle « addition logique ».

Ex. §Np P2·1 : Np ∩ (3+N) ⊃ (6N+1) ∪ (6N−1)

§↑ 5·9 §Num 2,·31,·32·5·6 §max ·3 §Dvr 1·33 §mlt 1·02·33 §q 43·7 §λ 1·3 4·1 §sin⁻¹ P1·1, 2·1.

Leibniz a indiqué l'opération ∪ par le signe +, ou par le même signe dans un cercle. Nous ne pouvons pas représenter par un même signe les additions logique et arithmétique, sans produire des ambiguïtés. P. ex. :

Np + Np = 2(N+1), Np ∪ Np = Np.

Le signe + dans Boole a une signification un peu différente.

·1 $a,b,c\varepsilon$ Cls .⊃:
$ab\cup c = (ab)\cup c : a\cup bc = a\cup(bc) : a\cup b\supset c .=. (a\cup b)\supset c : a\supset b\cup c .=. a\supset(b\cup c)$:
$a\cup b\cup c = (a\cup b)\cup c : x\varepsilon\ a\cup b .=. x\varepsilon(a\cup b)$ Df

·2 $a,b\varepsilon$ Cls .⊃. $a\cup b\ \varepsilon$ Cls

·3 » . $a\supset a\cup b$. $b\supset a\cup b$

| Leibniz *PhilS.* t.7 p.240 : « *N* est in *A* ⊕ *N* » |

[§1P2·3 .⊃: $a,b,c\varepsilon$ Cls . $a\supset c$. $b\supset c$. $x\varepsilon a$.⊃. $x\varepsilon c$ (1)
(1) . Export .⊃: $a,b\varepsilon$ Cls . $x\varepsilon a$.⊃: $c\varepsilon$ Cls . $a\supset c$. $b\supset c$.$\supset_c$. $x\varepsilon c$ (2)
(2) . P·0 .⊃: » » .⊃. $x\varepsilon\ a\cup b$ (3)
(3) . Export .⊃: $a,b\varepsilon$ Cls .⊃: $x\varepsilon a$.$\supset_x$. $x\varepsilon\ a\cup b$ (4)
(4) . Oper $x\ni$.⊃. P]

·4 $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset c \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \cup b \supset c$ | LEIBNIZ Id. p.232: «Si A est in C et B est in C etiam $A+B$ erit in C.» |

[P·0 . Oper $x\varepsilon \,.\supset\!:\, a,b\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\!\cdot.\, x\varepsilon\, a\cup b \,.=:\, c\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\supset c \,.\, b\supset c \,:\supset_c .\, x\varepsilon c$ (1)
(1) . Simpl $.\supset.\!\cdot.\, a,b\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, x\varepsilon\, a\cup b \,.\supset\!:\, c\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\supset c \,.\, b\supset c \,.\supset_c .\, x\varepsilon c$ (2)
(2) . Import $.\supset\!:\, a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, x\varepsilon\, a\cup b \,.\, a\supset c \,.\, b\supset c \,.\supset.\, x\varepsilon c$ (3)
(3) . Export $.\supset.\!\cdot.\, a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\supset c \,.\, b\supset c \,.\supset\!:\, x\varepsilon\, a\cup b \,.\supset_x .\, x\varepsilon c$ (4)
(4) . Oper $x\ni \,.\supset.$ P]

·5 $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\supset b \,.\supset.\, a\cup c \supset b\cup c$ | Oper $\cup$ |
| LEIBNIZ Id. p.239 | | McCOLL a.1878 P10 |

·6 $a,b,c,d \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\supset b \,.\, c\supset d \,.\supset.\, a\cup c \supset b\cup d$ | LEIBNIZ p.232: «Si A est in M, et B est in N, erit $A+B$ in $M+N$.» |

·61 $a\supset b\cup c \,.\, b\supset d \,.\, c\supset d \,.\supset.\, a\supset d$
| DE MORGAN *Formal logic* a.1847 p.123 |

✱ 2. $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.$

·1 $a\cup a = a$ | LEIBNIZ Id. p.230: «Si idem secum ipso sumatur, nihil constituitur novum, seu $A+A \infty A$.» |
[Df $\cup$ $.\supset.\, a\cup a = x\ni(c\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\supset c \,.\supset_c .\, x\varepsilon c)$. §1P6·3 $.\supset.$ P]

·2 $a\cup b = b\cup a$ | LEIBNIZ Id. p.237 | | Comm$\cup$ |
[Df$\cup$ $.\supset.\, a\cup b = x\ni(c\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\supset c \,.\, b\supset c \,.\supset_c .\, x\varepsilon c)$
Comm$\cap$ $.\supset.$ » » $.\, b\supset c \,.\, a\supset c \,.\supset_c .$ »
Df$\cup$ $.\supset.$ » $b\cup a$]

·3 $a\cup b\cup c = a\cup(b\cup c) = (a\cup b)\cup c$ | Assoc$\cup$ |
| SCHRÖDER a1877 P3′ |
[$(a\cup b)\cup c = x\ni[d\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\cup b\supset d \,.\, c\supset d \,.\supset.\, x\varepsilon d]$
$= x\ni[d\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\supset d \,.\, b\supset d \,.\, c\supset d \,.\supset.\, x\varepsilon d]$
$= x\ni[d\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\supset d \,.\, b\cup c\supset d \,.\supset.\, x\varepsilon d]$
$= a\cup(b\cup c)$]

·4 $b\supset a \,.=.\, a\cup b = a$ | LEIBNIZ Id. p.232: «Si B est in A, erit $A+B \infty A$ ... Si $A+B \infty A$, tunc B erit in A.» |

·5 $a\supset c \,.\, b\supset c \,.=.\, a\cup b\supset c$ [P1·2·3·4 $.\supset.$ P]
| McColl a.1878 p.11 |

·6 P·5 $.\supset.$ P1·0
[§1 P6·3 $.\supset.\, a\cup b = x\ni(c\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a\cup b\supset c \,.\supset_c .\, x\varepsilon c)$
P·5 $.\supset.$ » » » $.\, a\supset c \,.\, b\supset c \,.$ »)]

De la P1·0, considérée comme Df du signe $\cup$, nous avons tiré les P successives. Réciproquement de la dernière 2·5 on peut déduire la 1·0; et puisque la ·5 est conséquence des P1·2·3·4, on aura une autre façon de traiter cet ensemble de P. On peut introduire l'idée $\cup$ comme primitive, en la déterminant par les P1·2·3·4, qui joueront le rôle de Pp (propositions primitives).

Si l'on remplace $a \supset b$ par $b \supset a$, et $a \cap b$ par $a \cup b$ dans les P:
§2 P5·2·3·4·5·6·61 6·1·2·3 7·2·3
on trouve §3 P1·2·3·4·5·6·61 2·1·2·3 ·4·5

La même substitution dans les démonstrations des premières P, permet de tirer directement les dernières des P1·2·3·4.

Cette correspondence, dite « loi de dualité », a été énoncée par Peirce a.1867.

Une troisième théorie du signe $\cup$ sera indiquée dans §– P3·1.

✱ 3. $a,b,c,d \varepsilon$ Cls $. \supset .$

·0 $ab \cup ac \supset a(b \cup c)$

[P1·3 $. \supset .$ $b \supset b \cup c$. $c \supset b \cup c$. Oper $\cap$ $. \supset .$ $ab \supset a(b \cup c)$. $ac \supset a(b \cup c)$. P1·4 $. \supset .$P]

·01 $a(b \cup c) \supset ab \cup ac$ Pp

Cette P n'est pas conséquence des P précédentes. Pour reconnaître son indépendence, il suffit de donner aux signes Cls, $\cap$, $\cup$ une interprétation qui satisfasse aux P précédentes, mais non à cette-ci. Considérons des points; par Cls indiquons les classes convexes de points, c'est-à-dire les u telles que Med$u = u$; au signe $\cap$ conservons sa valeur; alors, par la Df1·0, $a \cup b$ indique « la plus petite classe convexe contenant a et b ». Il est aisé de voir que subsistent les propositions précédentes du § $\cup$, et aussi les dualitiques, mais non la nouvelle ·01. Il faut donc, en suivant l'ordre que nous avons ici choisi, la considérer comme une « proposition primitive ». Voir §– P3·5.

·1 $a(b \cup c) = ab \cup ac$ [$=$. P·0 . P·01] { Distrib($\cap$,$\cup$) }
{ LAMBERT a.1781 p.33:
« Will man aber setzen $(m+n)A$, so ist dieses $= mA + nA$. »}

·11 $(a \cup b)c = ac \cup bc$ [Comm $\cup$. Distrib ($\cap$, $\cup$) $. \supset .$ P]

·12 $(a \cup b)(c \cup d) = ac \cup ad \cup bc \cup bd$ { LAMBERT id. }

·2 $a \cup ab = a$ ·21 $a(a \cup b) = a$ { SCHRÖDER a.1877 P10°10′ }

·22 $(a \cup c)(b \cup c) = ab \cup c$ [Distrib($\cup$, $\cap$)] { PEIRCE a.1867 p.250 }

·23 $(a \cup b)(b \cup c)(c \cup a) = ab \cup bc \cup ca$ { SCHRÖDER a.1890 p.383 }

·3 $a = b . = . a \cup b \supset ab$ { SCHRÖDER a.1890 p.382 }

·4 $ac \supset b . a \supset b \cup c . = . a \supset b$ { PEIRCE a.1880 p.34 }

·41 $ac \supset bc . a \cup c \supset b \cup c . = . a \supset b$ { SCHRÖDER a.1890 p.362 }

·42 $ac = bc . a \cup c = b \cup c . = . a = b$ { » a.1877 p.12 }

·43 $a \supset b . b \supset c . = . a \cup b \supset bc$ { PADOA F1897 }

·5 $a \supset b \cup c . ab \supset d . ac \supset d . \supset . a \supset d$ { PIERI F1897 }

✱ 4. $a,b,c \varepsilon$ Cls $. \supset .$

·0 $x \varepsilon a . \cup . x \varepsilon b . = . x \varepsilon a \cup b$ Df { Distrib(ε,$\cup$) }
{ F1889 P48 }

Cette P exprime la somme logique de deux propositions $x \varepsilon a$ et $x \varepsilon b$ par la P $x \varepsilon a \cup b$, où ne figure que la somme de deux classes. Puisque toute P est réductible à la forme $x \varepsilon a$, ou x est une variable, ou un système de variables, on aura défini la somme de deux P quelconques.

Ex. §Np P1·2 : $a\varepsilon$ Np . $b,c\varepsilon$N . $b\times c$ ε N$\times a$.⊃. $b\varepsilon$ N$\times a$.∪. $c\varepsilon$ N$\times a$

Ex. §× 1·5 2·4 §↑ 5·4·5 §> 2·4·5 ...

La P·0 dit que l'opération ε est distributive par rapport à ∪. L'opération ⊃ ne l'est pas. En effet de $(N+1)^2 \supset 4N \cup (4N+1)$, on ne peut pas tirer $(N+1)^2 \supset 4N$, ou $(N+1)^2 \supset 4N+1$.

·1 $x\ni(x\varepsilon a \,.\cup.\, x\varepsilon b) = a\cup b$ Df? { Distrib(ɜ ,∪) } { F1889 P62 }

[P·0 . Oper $x\ni$.⊃. P]

Cette P exprime la somme logique de deux classes par une somme de P.

·2 $a\supset c \,.\cup.\, b\supset c \,.\supset.\, ab\supset c$ { McColl a.1878 P13 }

·21 $a\supset b \,.\cup.\, a\supset c \,.\supset.\, a\supset b\cup c$ » » P14

§3 Λ

✱ 1·0 $\Lambda = x\ni(a\varepsilon \text{ Cls } .\supset_a.\ x\varepsilon a)$ Df

Λ indique la classe nulle. Leibniz l'a indiquée par N, initiale de Nihil ; Boole et ses continuateurs par 0. Ce signe ne se rencontre plus dans F1899 où il est exprimé par les signes - et ꟻ. Nous le conservons ici, car il permet de traiter simplement quelques théories logiques. Ex:

$N^3 \frown (N^3+N^3) = \Lambda$ « il n'y a pas de cubes, sommes de deux cubes ».

·1 $\Lambda\ \varepsilon$ Cls { F1897 P436 }

·2 $a\varepsilon$ Cls .⊃. $\Lambda\supset a$ { F1888 §2 P13 }

[P·0 .⊃∴ $x\varepsilon\ \Lambda$.⊃: $a\varepsilon$ Cls .$\supset_a$. $x\varepsilon a$ (1)

(1). Import .⊃∴ $x\varepsilon\ \Lambda$. $a\varepsilon$ Cls .⊃. $x\varepsilon a$ (2)

(2). Export .⊃∴ $a\varepsilon$ Cls .⊃: $x\varepsilon\ \Lambda$.$\supset_x$. $x\varepsilon a$ (3)

(3). Oper $x\varepsilon$.⊃. P]

·3 $a\varepsilon$ Cls .⊃. $a\frown\Lambda = \Lambda$ { Boole a.1854 p.48 }

[P·2 . §1P5·2 .⊃. P]

·4 $a\varepsilon$ Cls .⊃: $a\supset\Lambda$.=. $a=\Lambda$ { F1889 P38 }

[P·2 .⊃. P]

·5 $a\varepsilon$ Cls .⊃: $a=\Lambda$.=: $b\varepsilon$ Cls .$\supset_b$. $a\supset b$ Df? { F1897 P300 }

$a,b,c,d\varepsilon$ Cls .⊃.

·6 $a\supset b$. $b=\Lambda$.⊃. $a=\Lambda$ [P·4 . Syll .⊃. P]

·7 $a\supset b$. $bc=\Lambda$.⊃. $ac=\Lambda$ { Aristoteles id. id. }

·8 $a\supset c$. $b\supset d$. $cd=\Lambda$.⊃. $ab=\Lambda$ { De Morgan a.1847 p.123 }

∪ Λ ✱ 2. $a,b,c,d\varepsilon$ Cls .⊃:

·1 $a\cup\Lambda = a$ { Boole a.1854 p.47 }

[Hp . P·2 .⊃. $\Lambda\supset a$. §∪ P2·4 .⊃. Ths]

·2 $a \cup b = \Lambda \,.=.\, a = \Lambda \,.\, b = \Lambda$ { BOOLE a.1854 }
{ F1888 §6 P9 }

[P1·4 $.\supset:$ $a \cup b = \Lambda \,.=.\, a \cup b \supset \Lambda$
§∪ P2·5 $.\supset:$ » $.=.\, a \supset \Lambda \,.\, b \supset \Lambda$
P1·4 $.\supset:$ » $.=.\, a = \Lambda \,.\, b = \Lambda$]

·3 $a = \Lambda \,.\cup.\, b = \Lambda \,.\supset.\, ab = \Lambda$ { F1895 §3 P11 }

·4 $a \cup b = a \cup c \,.\, a \cap b = \Lambda \,.\, a \cap c = \Lambda \,.\supset.\, b = c$

·5 $a \cup b = c \cup d \,.\, a = c \,.\, ab = \Lambda \,.\, cd = \Lambda \,.\supset.\, b = d$

{LEIBNIZ Id. p.234: « Si $A+B \infty C+D$ et $A \infty C$, erit $B \infty D$, modo A et B itemque C et D sint incommunicantia. » }

·6 $a \cup b \supset c \cup d \,.\, c \supset a \,.\, d \supset b \,.\, ab = \Lambda \,.\supset.\, a \supset c \,.\, b \supset d \,.\, cd = \Lambda$
{ HAUBER a.1829 §291 }

·7 $a \supset b \cup c \,.\, ab = \Lambda \,.\supset.\, a \supset c$ { DE MORGAN a.1847 p.122 }

Une remarque curieuse est la suivante. Remplaçons:
$x \varepsilon$ Cls par $x \varepsilon$ N
$a \supset b$ » $a \leqq b$, ou par « a est un diviseur de b »
$a \cap b$ » « le plus petit des nombres a et b » ou par « le plus grand commun diviseur entre a et b »
$a \cup b$ » « le plus grand des nombres a et b » ou par « le plus petit multiple commun entre a et b »
Λ » 1

Subsisteront toutes les P précédentes qui ne contiennent que les signes indiqués, comme les §2 P3·4·5 P5·2-·64 P6·0-·3 P7·2·3·4... P. ex la §Λ P2·7, par la deuxième substitution devient:

« Si le nombre a divise le plus petit multiple commun entre b et c, et s'il est premier avec b, alors il divise c ».

§4 -

* 1·0 Soit a une Cls; $-a$ indique la Cls des " non a ".
·01 Soit p une proposition; $-p$ désigne sa négation.

Ex. de la négation d'une Cls, §Np P1·0 :

$$\mathrm{Np} = (\mathrm{N}+1) - [(\mathrm{N}+1) \times (\mathrm{N}+1)] \qquad \text{Df.}$$

« Nombre premier signifie nombre (supérieur à l'unité), non décomposable dans le produit de deux nombres ».

Dans ce cas, et dans §N_1 ·5·7 §r 7 §∩ 35 §max 1·0 §Dvr 1·81 §Np 5·2 13·0·2·3 §l' 4·6·7 §log 1·1·6·7 §q_n 2·0 §Subst 3·0 5·4 §q' 5·3 §tng 6·5 §vct 8·83 70·1·2·3·4 §D 3·2·37 45·3 on a toujours l'expression $b-a$ où la classe a est contenue dans b.

Dans §δ 4·0 §q_n 21·0 la classe a n'est pas nécessairement contenue dans b.

Ex. de la négation d'une P:

§> 10·01 : $a,b \varepsilon \mathrm{N} \,.\, -(a=b) \,.\supset.\, a^2+b^2 > 2ab$.

Autres ex: §+ 2·4 §N_1 ·3 §r 10·1·3·4 11 §∩ 4·2·3·5·6·7 §≥ 2·6 §Num ·01·03

·05·3·8 §Σ 1·6 §max 12·2 §quot 2·7 §Dvr 1·9 §Np 10·3 12·2 §Sgm ·3 §lim 15·1 §q′ 2·5 4·2 5·2 §π 4·2 §tang 6·0·4 §vct 60·35·37 61·3 §D 3·21 5·1-·3.

Nous avons cités presque toutes les P du F contenant le signe −. On voit que leur nombre est très petit.

Le signe de négation se rencontre sous la forme du signe — de l'Arithmétique, avec lequel il présente quelques analogies formelles, dans Leibniz, Segner, Boole,..., avec la même valeur, ou avec des valeurs semblables. Dans quelques travaux il a la forme ⌐.

Nous ne donnons pas ici une définition symbolique de la négation ; nous la considérons comme une idée primitive, dont la valeur est déterminée par les propositions primitives 2·1·2·3.

Les P3·8, §ι P·6 indiquent la possibilité d'autres théories, où la négation est définie ; dans F1897 P363 et 433 sont indiquées deux autres théories; mais elles ne sont pas développées.

·1 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \; .\supset. \; -(x \varepsilon a) = x \varepsilon -a$ Df?

·11 » $-a = x \ni -(x \varepsilon a)$ Df?

Les P lient le double rôle de la négation entre P et entre Cls; la .1 exprime la négation d'une P par la négation d'une classe ; la ·11 exprime la négation d'une classe par la négation d'une P. Il suffit donc de considérer l'une des P·0·01 comme exprimant une idée primitive, et prendre une des P·1·11 comme Df.

Pour supprimer des parenthèses on fait les conventions suivantes :

·2 $x -= y \; .=. \; -(x=y)$ Df

$a,b \varepsilon \mathrm{Cls} \; .\supset:$ ·3 $x -\varepsilon a \; .=. \; -(x \varepsilon a)$ Df

·31 $x,y -\varepsilon a \; .=. \; x -\varepsilon a \, . \, y -\varepsilon a$ { Ex. §Np P6·2-·4 } Df

·4 $x \varepsilon -a \; .=. \; x \varepsilon (-a) \; : \; a-b = a \frown -b \; : \; -a \supset b \; .=. \; (-a) \supset b \; : \; -a = b \; .=. \; (-a) = b$ Df

·5 $x \varepsilon -a \; .=. \; x -\varepsilon a$ [P·1 . P·3 .⊃. P] { Comm(ε,−) }

On dit qu'une opération α est commutable avec la β si $\alpha\beta x = \beta\alpha x$. Cette P dit que les opérations ε et − sont commutables. L'operation ⊃ n'est pas commutable avec la −. En effet de −(Np ⊃ 2N+1) « non est vrai que tous les nombres premiers soient impaires » (car 2ε Np), on ne déduit pas Np ⊃ −(2N+1), « tous les nombres premiers sont pairs ».

{ ·1-·5 F1889 P46, 61,... }

✱ 2. $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} \; .\supset.$

·1 $-a \; \varepsilon \; \mathrm{Cls}$ Pp

·2 $-(-a) = a$ { LEIBNIZ Mss. VIIB 2 p.3 : « $A \infty \overline{\text{non non } A}$ » } Pp

·3 $ab \supset c \; .\supset. \; a-c \supset -b$ { Transposer } Pp

·4 $a \supset b \; .\supset. \; -b \supset -a$ »

{ LEIBNIZ Mss. *Phil.* VIIB 2 fol.17 : « *A* est *B* ergo non*B* est non*A* » }

[Hp .⊃. $(-b)a \supset a \, . \, a \supset b \; .\supset. \; (-b)a \supset b$. P·3 .⊃. $(-b)(-b) \supset -a$. Simplif .⊃. Ths]

Nous appelons « transposer » l'application des P·3·4, par l'analogie qu'elles

présentent avec la transposition des termes dans une égalité ou inégalité algébrique. La règle ·3 est appelée quelquefois « la loi des inverses ». Nous appelons aussi « transposer » les règles P3·7·71, et 4·2.

La P·4, conséquence des précédentes, remplace la Pp·3 dans les Dm des P·5·51·52 3·1 ...

·5 $a \supset b .=. -b \supset -a$ [P·4 . $(-b,-a)|(a,b)$P·4 .⊃. P]
{ F1888 P8 }

·51 $a=b .=. -a=-b$ [P·5 .⊃. P]

·52 $a=b .=. a\supset b . -a\supset -b$ { F1897 P118 }

·53 $a-(ab) = a-b$ { F1897 P117 }

·54 $a\supset b .=. a-b \supset b$ { PADOA F1897 P122 }

·55 $a-b = b-a .=. a=b$ { VAILATI RdM a.1891 p.103 }

·6 $ab \supset c .=. a-c \supset -b$ { PEIRCE a.1880 p.35 }
[P·3 . $(-c,-b)|(b,c)$P·3 .⊃. P]

·61 $a,b,c \varepsilon$ Cls . $ab \supset c . a-b \supset c .\supset. a \supset c$

·62 $(a-b)c = (ac)-(bc)$ { BOOLE a.1854 p.34 }

·63 $ab = ac .=. a-b = a-c$ { WHITEHEAD a.1898 p.40 }

∪ - ✱ 3. $a,b,c,d,x \varepsilon$ Cls .⊃.

·1 $a\cup b = -[(-a)\cap(-b)]$ Df?

[§2 P5·3 .⊃. $ab\supset a . ab\supset b$. Transp .⊃. $-a\supset -(ab) . -b\supset -(ab)$ (1)
(1) . §∪ P1·4 .⊃. $-a\cup -b\supset -(ab)$ (2)
$(-a, -b)|(a,b)$ (2) .⊃. $a\cup b\supset -[(-a)(-b)]$ (3)
§∪ P1·3 .⊃. $a\supset a\cup b . b\supset a\cup b$. Transp .⊃. $-(a\cup b)\supset -a . -(a\cup b)\supset -b$.
Cmp .⊃. $-(a\cup b)\supset (-a)(-b)$. Transp . $-(-a)(-b)\supset a\cup b$ (4)
(3) . (4) .⊃. P]

·2 $-(a\cup b) = (-a)(-b)$ [P·1 .⊃. P]

·3 $a\cap b = -[(-a)\cup(-b)]$ Df? [$(-a, -b)|(a,b)$ P·2 .⊃. P]

·4 $-(ab) = -a \cup -b$ [P·3 .⊃. P]

{ ·1-·4 DE MORGAN a.1858 p.208 } {SCHRÖDER a.1877 p.18}

·5 P2·1·2·3 . P3·1 .⊃. §∪ P3·01 { F1897 P215 }
[$a,b,c \varepsilon$ Cls .⊃. $ab\supset ab . ac\supset ac$. Transp .⊃. $a-(ab)\supset -b . a-(ac)\supset -c$.
Cmp . $a-(ab)-(ac)\supset -b-c$. Transp .⊃. $a-(-b-c)\supset -[-(ab)-(ac)]$. P·1 .
⊃. $a(b\cup c)\supset ab\cup ac$]

La P·1 exprime l'opération ∪ par les ∩ et - ; dans F1897 on l'a prise comme Df. La P·5 dit que de la ·1, et des propriétés de la négation on déduit la §∪ P3·01, qui se présenta ici comme Pp.

·6 $a = ab\cup a-b$ { LAMBERT a.1781 p.11 : « $a = ax + a|x$ » }

·7 $a-b\supset c .=. a\supset b\cup c$ { PEIRCE a.1867 } { Transp }
[Transp .⊃: $a-b\supset c .=. -b-c\supset -a .=. a\supset b\cup c$]

$\cdot 71 \quad ab \supset c \cup d .=. a-c \supset d \cup -b$ { Transp }
{ PEIRCE a.1880 p.36 : $(a \times b \prec 0 + d) = (a \times \overline{d} \prec 0 + \overline{b})$ }

$\cdot 8 \quad a-b = x \ni (c \varepsilon \text{Cls} . a \supset b \cup c . \supset_c . x \varepsilon c)$ Df? { F1897 P257 }
[§1 P6·3 $. \supset . \; a-b = x \ni (c \varepsilon \text{Cls} . a-b \supset c . \supset_c . x \varepsilon c)$
P·7 $. \supset .$ » » $. a \supset b \cup c$ »]

La P·7 contient dans un membre le signe - qui ne figure pas dans le second; on peut la transformer dans la P·8, qui est une définition possible de l'expression $a-b$.

Si l'on prend la 8 comme Df, il ne faut plus considérer le signe $-b$, isolé, qui effectivement ne se rencontre pas dans les applications. En conséquence il faut modifier l'énonciation de quelques P précédentes. P. ex. la P2·4 doit être transformée en $a,b,c \varepsilon \text{Cls} . a \supset b . \supset . c-b \supset c-a$.

Il y a l'avantage à prendre la ·8 comme Df, qu'on supprime la négation du nombre des idées primitives; mais de la ·8 comme Df, et des P précédentes ce § on ne sait pas déduire les P de ce §. Voir un essai dans F1897 P258-260.

$\cdot 9 \quad (a \cup x)(b \cup -x) = a-x \cup bx$ { PEIRCE a.1880 p.36 }
$\cdot 91 \quad (ax \cup b-x)(cx \cup d-x) = acx \cup bd-x$ { BOOLE a.1854 }
$\cdot 92 \quad -(ax \cup b-x) = (-a)x \cup (-b)(-x)$ { SCHRÖDER a.1877 P.19 }
$\cdot 93 \quad ab \supset ax \cup b-x \supset a \cup b$ { SCHRÖDER a.1891 P.48 }
$\cdot 94 \quad a \cup b = a \cup b(-a)$ { » a.1890 p.308 }
$\cdot 95 \quad a = b-c \cup c-b . \supset . b = c-a \cup a-c$
{ JEVONS *Pure logic* a.1864 p.61 }

Cet A. a indiqué la fonction $a-b \cup b-a$ par $a \;_0\; b$; le signe $_0$ correspond au latin *aut*; le signe $\cup$ à *vel*. Cette opération a des curieuses propriétés, développées dans F1895 §3 P24-30, dont la plus importante est la ·95.

Λ - ✱ 4. $a,b \varepsilon \text{Cls} . \supset : \quad \cdot 1 \quad a-a = \Lambda$
{ LEIBNIZ *PhilS.* t.7 p.230 : « seu A—A ∞ N » }
[P3·8 $. \supset . \; a-a = x \ni (c \varepsilon \text{Cls} . a \supset a \cup c . \supset_c . x \varepsilon c)$
§$\cup$ 1·3 » $= x \ni (c \varepsilon \text{Cls} . \supset_c . x \varepsilon c) = \Lambda$]

$\cdot 2 \quad a \supset b .=. a-b = \Lambda$ Df? { Transp }
{ LEIBNIZ id. p.212: Omne *A* est *B*, id est ... *A* non *B* est non Ens }
{ F1888 §6 P2 }
[§Λ P2·1 . §- P3·7 . §Λ P1·4 $. \supset :$
$a \supset b .=. a \supset b \cup \Lambda .=. a-b \supset \Lambda .=. a-b = \Lambda$]

$\cdot 3 \quad a = \Lambda .=. a \supset -a$ Df?

$\cdot 4 \quad a \supset -\Lambda$
[Hp . §- P2·1 $. \supset . -a \varepsilon \text{Cls} .$ §Λ P1·2 $. \supset . \Lambda \supset -a$. Transp $. \supset .$ P]

$\cdot 5 \quad a-\Lambda = a$ [P·4 , §1 P5·2 $. \supset .$ P]

$\cup \wedge -$ ✱ 5. $a,b,c,x \varepsilon$ Cls $. \supset :$

·1 $a = b .=. a{-}b \cup b{-}a = \wedge$ { SCHRÖDER a.1877 P175 }

·2 $a = b \cup c \,.\, bc = \wedge \,.\supset.\, b = a{-}c$ { BOOLE a.1854 p.35 }

·3 $ax \cup b{-}x = \wedge .=. b \supset x \supset {-}a$

{ BOOLE p.101; SCHRÖDER a.1891 P49 }

·4 $ax \cup b{-}x = \wedge \,.\supset.\, ab = \wedge$ { BOOLE a.1854 p.101 }

La classe $-\wedge$ a été indiquée par Peirce, AJ. a.1887 et dans F 1889 et suivants, par le signe $\vee$, qu'on lit « tout » ou « vrai ». Toute expression obtenue en combinant une classe x avec des classes données par les signes $\cap \cup -$ est réductible à la forme $ax \cup b{-}x$, où a et b sont des classes déterminées. En effet une classe constante $a = ax \cup a{-}x$;
la variable $x = \vee x \cup \wedge{-}x$;
la somme de deux expressions ayant cette forme a évidemment la même forme; et les P3·91-·92 réduisent à cette forme le produit et la négation d'une expression semblable.

Si l'on pose $fx = ax \cup b{-}x$, on déduit $f\vee = a$, et $f\wedge = b$; et l'on a le développement de toute fonction logique:

$$\bullet fx = (f\vee)x \cup (f\wedge){-}x$$

du à Boole, et qui présente quelques analogies avec la formule de Taylor.

Soit $f(x,y)$ une fonction logique des deux classes x et y. Développons par rapport à x, et ensuite les coefficients par rapport à y; on aura

$$f(x,y) = f(\vee,\vee)xy \cup f(\wedge,\vee)(-x)y \cup f(\vee,\wedge)x(-y) \cup f(\wedge,\wedge)(-x)(-y).$$

En général, une fonction logique a $2^m = n$ termes, chacun desquels contient un coefficient multiplié par le produit de l'affirmation ou de la négation de chacune des lettres.

Si la fonction ne contient que les m lettres, les coefficients auront nécessairement la valeur $\vee$ ou la $\wedge$. On obtient aussi 2^n expressions différentes avec m lettres; parmi elles il y a les classes constantes $\wedge$ et $\vee$.

Toute déduction, et toute égalité entre deux expressions de la forme dite est réductible à une égalité dont le second membre est $\wedge$, par P4·2 5·1; le système simultané de plusieurs équations est réductible à une équation seule, par §$\cup$ P2·2. En conséquence tout système de déductions on d'égalités logiques est réductible à la forme 5·3, qui permet de la résoudre par rapport à la classe inconnue x.

Soient données n propositions conditionnelles, indépendentes entre elles; c'est-à-dire telles qu'une quelconque ne puisse être déduite des autres en les combinant par les signes $\cap \cup -$; cela arrive si elles sont indiquées par n lettres variables. Par la relation qui passe entre les Cls, et les P conditionnelles, qui ne sont que deux formes d'une même idée, on dédult qu'en les combinant par les signes $\cap \cup -$, on peut eomposer 2^{2^n} propositionsdifférentes. Les signes $\vee$ et $\wedge$, lorsqu'il s'agit de P, signifient « vrai » et « faux ».

Considérons encore m classes indépendentes. En égalant toutes les fonctions de ces classes à $\wedge$, on a un ensemble de P; mais elles ne sont pas

indépendentes; car, par la §$\cup$ P2·2, si le premier membre est une somme, on peut décomposer cette P dans l'affirmation de plusieurs autres.

Les P indépendentes s'obtiennent en égalant à Λ les produits des affirmations ou des négations des m Cls ; elles sont en nombre de $2^m = n$. Les produits des affirmations ou des négations de ces n équations sont en nombre de $2^n = p$; parmi eux il y a le produit de toutes ces n P, qui est réductible à $V = \Lambda$, proposition fausse, qui ne contient plus de variables, et que nous supprimons. On a encore $p-1$ produits contenant effectivement de variables.

En affirmant la somme logique d'un nombre quelconque de ces P, on a $2^{p-1} = q$ propositions. L'affirmation de toutes, ou d'aucune P ne contiennent plus de variables. On a en tout $q-2 = 2\uparrow 2[\uparrow(2\uparrow m - 1)] - 2$ propositions, qu'on peut énoncer avec m Cls, en les combinant par les signes $\frown, \cup, -$, soit entre Cls, soit entre les P résultantes, et qui contiennent effectivement les variables. Il forment un système complet: en les combinant par addition, multiplication, et négation, on a toujours des P du même système.

Si $m=1$, avec une Cls a on peut énoncer les 6 P:

$$a = \Lambda \qquad -a = \Lambda \qquad a - = \Lambda \qquad -a - = \Lambda$$
$$a - = \Lambda \,.\, -a - = \Lambda \qquad a = \Lambda \,.\cup.\, -a = \Lambda$$

Sur deux classes ($m=2$), on peut énoncer 32766 relations.

Nous avons indiqué par des signes simples des deux relations $a \supset b$ et $a = b$; quelques A. ont introduit des signes nouveaux pour indiquer d'autres relations moins importantes.

Nous avons fait ce calcul dans F1888 p.X. V. aussi Schröder a.1891 p.164.

Ces théories ne sont que partiellement réduites en symboles, et n'ont pas reçu d'application dans les sciences mathématiques.

§5 $\exists$

$\Lambda - \exists$ ✱ 1. $a, b \varepsilon$ Cls $.\supset:$ ·0 $\exists a .=. a - = \Lambda$ Df

·01 $\exists ab .=. \exists(ab)$ Df

Soit a une Cls; $\exists a$ signifie « il y a des a, les a existent ». Nous exprimons cette idée au moyen des précédentes par la P·0. Ex :

$\exists N^2 \frown (N^2 + N^2)$ « Il y a des nombres carrés, sommes de deux carrés ».

§+ 2·52 §R 4·8 §↑ 4·2-·8. La P particulière « quelque a est b » s'exprime, sans conventions nouvelles, par $\exists ab$.

·1 $x \varepsilon a .\supset. \exists a$ { F1889 P53 } {Ex. : §Dvr P1·3}

[Syll $.\supset:$ $a \varepsilon$ Cls . $a = \Lambda$. $x \varepsilon a .\supset. x \varepsilon \Lambda$ (1)

(1) . §- 2·1 . Df $\Lambda .\supset:$ » » $x \varepsilon -a$ (2)

(2) . Transp . Df $\exists .\supset.$ P]

De $x \supset a$ on ne déduit pas $\exists a$, si l'on n'est pas assuré que $\exists x$ (P1·2).

·2 $a \supset b . \exists a .\supset. \exists b$ [§Λ 1·5 . Transport $.\supset.$ P]

·21 $a \supset b .\supset: \exists a .\supset. \exists b$ { Oper $\exists$ } { F1895 P116 }

« Opérer par $\exists$ » signifie écrire le signe $\exists$ en avant des deux membres d'une déduction. On obtient une déduction de même sens.

·3 $\exists\, a \cap b \,.\supset.\, \exists a \,.\, \exists b$ [P·2 $\supset$ P]   { F1895 §3 P12 }

·4 $a \supset b \,.=.\, \exists\, \mathrm{Cls} \cap c \ni (a = bc)$ Df?   { F1897 P411 }

✱ 2. $a, b, c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset\therefore$

·1 $(x;y) \varepsilon a \,.\supset_{x,y}.\, y \varepsilon b \,:=:\, \exists\, x \ni [(x;y) \varepsilon a] \,.\supset_y.\, y \varepsilon b$

{ P·1 = Elim x = (éliminer la variable x) }

Supposons que dans une déduction: Hp $.\supset.$ Ths (1)
l'Hp contienne une variable x, ou un système de variables, qui ne figure pas dans la Ths; le signe $\supset$ porte comme indices x et d'autres variables. Alors la P (1) est réductible à la forme:

(S'il y a des x vérifiant l'Hp) $.\supset.$ Ths (2)

où le signe $\supset$ ne porte plus comme indice x. La transformation de (1) en (2) s'appelle « élimination de x ». Dans la nouvelle Hp la lettre x est apparente. Dans plusieurs cas on peut la faire disparaître.

Ex. dans les Dém. de §> 1·1·2 §Dvr 1·3 §ϑ·33 §λ 1·2 §vct 3·11.

·2 $\exists\, x \ni \exists\, y \ni [(x;y) \varepsilon a] \,.=.\, \exists\, y \ni \exists\, x \ni [(x;y) \varepsilon a] \,.=.\, \exists a$

Soit une relation ou condition entre les variables x, y, que nous représentons par $(x;y)\varepsilon a$. Alors dans la P " il y a des x tels qu'il y a des y qui vérifient la condition donnée " on peut permuter les deux variables. On peut la transformer aussi en " il y a des couples $(x;y)$ qui satisfont à la condition ".

·3 $\exists\, y \ni [x \varepsilon a \,.\, (x;y) \varepsilon b] \,.=_x.\, x \varepsilon a \,.\, \exists\, y \ni [(x;y) \varepsilon b]$

La P " il y a des y qui vérifient le produit logique d'une condition en x et d'une en (x, y) " signifie " la condition en x est vérifiée, et il y a des y qui vérifient la condition en y ". Autrement dit, on peut permuter le signe $\exists y \ni$ avec $x \varepsilon a$.

·4 $\exists\, a \cap x \ni \{\exists\, b \cap y \ni [(x;y) \varepsilon c]\} \,.=.\, \exists\, b \cap y \ni \{\exists\, a \cap x \ni [(x;y) \varepsilon c]\}$

·5 $\exists\, (x;y) \ni (x \varepsilon a \,.\, y \varepsilon b) \,.=.\, \exists a \,.\, \exists b$

" Il y a des couples (x, y) qui vérifient le produit logique d'une condition en x par une condition en y " signifie " il y a des x qui satisfont à la première condition, et des y qui satisfont à la deuxième ".

·6 $\exists\, y \ni [x \varepsilon a \,.\supset_x.\, (x;y) \varepsilon b] \,.\supset:\, x \varepsilon a \,.\supset_x.\, \exists\, y \varepsilon [(x;y) \varepsilon b]$

{ ·1-·6 F1889 P66, F1894 §18 ... }

Ces P expriment les principales identités qu'on rencontre entre les systèmes de variables. Remarquons que la P·6 n'est pas invertible. (Elle a été invertie par les analystes qui ont confondu la convergence d'une série avec sa convergence uniforme, la P §cont 1·01 avec la P1·1, et dans d'autres cas).

$\cup$ - $\exists$ ✱ 3. $a, b \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset:$ ·1 $\exists (a \cup b) \,.=.\, \exists a \,.\cup.\, \exists b$

{ F1895 §3 P10 }   { Distrib($\exists$,$\cup$) }

·2 $a \supset b \,.=.\, \exists\, \mathrm{Cls} \cap c \ni (a \cup c = b)$ Df?   { F1897 P412 }

·3 $\exists a \,.=.\, -a = a \cup -a$ Df?   { Padoa F1899 }

§6 ι

·0 $\iota x = y \ni (y = x)$ $\{ = $ (égal à x)$\}$ Df

·01 $y \varepsilon \iota x .=. y \varepsilon (\iota x) : a \supset \iota x .=. a \supset (\iota x) : a = \iota x .=. a = (\iota x)$ Df

Dans quelques cas il est utile de décomposer le signe = (est égal à), dans le signe ε (est), et dans un nouveau signe ι (égal à). Ce signe ι est l'initiale du mot ἴσος. En conséquence ιx désigne la classe formée par l'objet x, et $\iota x \cup \iota y$ la classe composée des objets x et y.

$-\iota x$ signifie « différent de x ».

Ex. $\quad Np - \iota 2 \supset 2N+1$

« tout nombre premier différent de 2 est impair ». Opérons par $x\varepsilon$ (§1 2·1), par Distrib(ε,$\frown$) (§1 3·1), et Comm(ε,$-$) (§$-$ 1·5). Elle devient:

$$x \varepsilon Np . x -= 2 .\supset. x \varepsilon 2N+1$$

Transposons : $\quad x \varepsilon Np .\supset. x = 2 .\cup. x \varepsilon 2N+1.$

Ex.: §N_1 ·4·5 §r 1·1·2 7 11 §Λ 35 §Np 4·31 13·2 §Q 1·01·4 3·2 27·01 33·2.

Les idées x et ιx sont évidemment différentes; car si l'on opère par $y\varepsilon$, on obtient les propositions différentes $y \varepsilon x$, et $y = x$.

·1 $y \varepsilon \iota x .=. y = x$ [= P·0]

·2 $a \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: x \varepsilon a .=. \iota x \supset a$ Df?

[§1 P8·5 .⊃: $\quad a \varepsilon \mathrm{Cls} . x \varepsilon a . y \varepsilon \iota x .\supset. y \varepsilon a$ (1)
(1) . Export .⊃∴ $\quad a \varepsilon \mathrm{Cls} . x \varepsilon a .\supset: y \varepsilon \iota x .\supset_y . y \varepsilon a$ (2)
(2) . Oper $y\ni$.⊃: $\quad a \varepsilon \mathrm{Cls} . x \varepsilon a .\supset. \iota x \supset a$ (3)
§1 P8·1 .⊃. $\quad x \varepsilon \iota x$ (4)
(4) .⊃: $\quad a \varepsilon \mathrm{Cls} . \iota x \supset a .\supset. x \varepsilon \iota x . \iota x \supset a .\supset. x \varepsilon a$ (5)
(3) (5) ⊃ P]

La P·2 exprime la P singulière $x \varepsilon a$ sous la forme d'une P universelle, contenant le signe ι.

·3 $\iota x = \iota y .=. x = y$ [$\iota x = \iota y .=. \iota x \supset \iota y . \iota y \supset \iota x .=. x \varepsilon \iota y$]

·4 $a \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset\therefore a = \iota x .=: x \varepsilon a : y \varepsilon a .\supset_y . y = x$

$\cup\ \iota$ ·5 $a \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: x,y \varepsilon a .=. \iota x \cup \iota y \supset a$ Df?

$\Lambda\ -\ \iota$ ·6 $a \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset. -a = x \ni (\iota x \frown a = \Lambda)$ Df?

[$-a = x \ni (x \varepsilon -a) = x \ni (\iota x \supset -a) = x \ni (\iota x \frown a = \Lambda)$]

Cette P exprime la négation au moyen des idées Λ et ι, définies par les seules idées des §§ 1 et 2. Nous pouvons déduire une des P fondamentales du signe $-$:

·61 P·6 ⊃ §$-$ P2·4

[$a,b \varepsilon \mathrm{Cls} . a \supset b .\supset. a \frown \iota x \supset b \frown \iota x$
» » » $(b \frown \iota x = \Lambda) \supset (a \frown \iota x = \Lambda)$
» » » $x \ni($ » $) \supset x \varepsilon($ » $) .\supset. -b \supset -a$]

$\exists\ \iota$ ·7 $a \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset. x \varepsilon a .=. \exists\, \iota x \frown a$ Df? [P·6 ⊃ P]

·8 $\exists\, \iota x$ [$x \varepsilon \iota x$. §$\exists$ 1·1 .⊃. P] $\{$ ·0·1·2·7 F1895 p.116. ·5·6 F1897 P423, 425. ·3·4·8 PADOA RdM t.6 p.117 $\}$

§7 ℩

∃ ι ℩

$\cdot 0 \quad a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, \exists a : x,y \varepsilon a \,.\supset_{x,y}.\, x=y \;:\supset:\; z = \text{℩}a \,.=.\, a = \iota z$ Df

$\cdot 01 \quad$ » $\quad : y\varepsilon a \,.\supset_y.\, a=\iota y \;:\supset:\;$ » » Df?

$\cdot 02 \quad$ » $\quad .\, \exists\, y \ni (a = \iota y) \;.\supset:\;$ » » Df?

$\cdot 03 \quad \mathrm{Hp\,P}\cdot 0 \,.\supset:\, z = \text{℩}a \,.=.\, z\varepsilon a$ Df?

$\cdot 04 \quad$ » $\quad .\, b\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\!:\, \text{℩}a\, \varepsilon b \,.=:\, a = \iota x \,.\supset_x.\, x\varepsilon b$ Df?

$\cdot 05 \quad$ » » » » $\exists\, x \ni (a = \iota x \,.\, x\varepsilon b)$ Df?

$\cdot 06 \quad$ » » » » $\exists\, a \cap b$ Df?

$\cdot 07 \quad$ » » » » $a \supset b$

$\cdot 1 \quad$ » $\quad .\supset.\, \text{℩}a\, \varepsilon a \qquad [\, (a|b)\mathrm{P}\cdot 04 \supset \mathrm{P} \,]$ Ex.: §— 1·1 §l′ 1·1

$\cdot 11 \quad$ » » $\iota(\text{℩}a) = a$

$\cdot 2 \quad \text{℩}\,(\iota x) = x$ Df?

$\cdot 3 \quad a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a = \iota x \,.\supset.\, x = \text{℩}a$

Λ ℩ $\quad \cdot 4 \quad \Lambda = \text{℩}\, \mathrm{Cls} \cap x \ni [a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset_a.\, x \supset a]$ Df?

Λ - ℩ $\quad \cdot 5 \quad \Lambda = \text{℩}\, x \ni [a\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset_a.\, a - a = x]$ Df?

{ ·0·1·2·4·5 F1897 P430-5. ·03·11·3 PADOA RdM t.6 p.118 F1899 }

Soit a une classe qui contient un seul individu x. Cela arrive lorsqu'il y a des a, et si deux individus de la classe a sont nécessairement égaux. Dans ce cas $\text{℩}a$ (ou $\bar{\iota}\, a$ des travaux précédents), qu'on peut lire "le a", indique l'individu x qui forme la classe a.

Ex. §— 1·0 : $\qquad a,b\varepsilon \mathrm{N} \,.\, b > a \,.\supset.\, b - a = \text{℩}\, \mathrm{N} \cap x \ni (a + x = b)$

« Soient a et b des nombres, et soit $a > b$. Par $b - a$ on indique *le* nombre qu'il faut ajouter à a pour avoir b ».

Nous savons de l'Arithmétique que, dans les hypothéses énoncées, la classe $\mathrm{N} \cap x \ni (a - x = b)$ existe, et qu'elle contient un seul individu. On conclut, par la P·1 $\; b - a\varepsilon \mathrm{N} \;.\; a + (b - a) = b$.

Si, selon M. Padoa RdM t.6 p.117, on indique par « $a\varepsilon \mathrm{Elm}$ » (a est un élément), l'Hp de la P·0, quelques P se présenteront sous une forme plus simple.

Les P·01-·03 sont des transformations de la même définition. Nous ne sommes pas réussi à donner une Df du signe isolé $\text{℩}a$, mais seulement de l'égalité $z = \text{℩}a$. Les P·04-·06 expriment la P $\text{℩}a\, \varepsilon b$ sous une autre forme, où ne figure plus le signe ℩ ; puisque toute P contenant le signe $\text{℩}a$ est réductible à la forme $\text{℩}a\, \varepsilon b$, où b est une Cls, on pourra éliminer le signe ℩ dans toute P.

La P·2 dit que ℩ représente l'opération inverse de ι. Elle a le caractère d'une Df ?, car le signe ℩ figure dans le premier membre, et non dans le second. Mais le premier membre est plus compliqué que le second ; on écrit le signe ℩ en avant d'une expression réductible, mais non réduite à la forme ιx.

Voir d'autres remarques dans F1897 p.50.

Ex. §/ 1·0 §R 3·0 5·0 12·0 22·0 25·0 §r 2·2·3·6·7·9 §mod 1·1 §max 1·0 §l' 1·0 §Log ·1 §E 1·1 §lim 1·0 §sin^{-1} 1·0 §vct 3·1·2·3 §S 1·0.

§8 ⁏

0 $u,v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\, (u \text{⁏} v) = (x;y) \ni (x \varepsilon u \,.\, y \varepsilon v)$ Df

·01 » $.\supset:\, (x;y)\, \varepsilon\, (u \text{⁏} v) \,.=.\, x \varepsilon u \,.\, y \varepsilon v$ Df ?

·02 $u,v,w\, \varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset.\, (u \text{⁏} v \text{⁏} w) = [(u \text{⁏} v) \text{⁏} w]$ Df

·03 » » $(u \text{⁏} v \text{⁏} w) = (x;y;z) \ni (x \varepsilon u \,.\, y \varepsilon v \,.\, z \varepsilon w)$

$(u \text{⁏} v)$ désigne l'ensemble des couples formés par un objet de la classe u avec un objet de la classe v; il faut distinguer ce nouveau signe, de $(u;v)$ qui désigne le couple dont les deux éléments sont les classes u et v.

Ex.: §Num ·7

Num N = Num(N⁏N) « le nombre des nombres naturels est un infini de la même puissance que le nombre des couples des nombres naturels ».

§lim 19·1·2 §Dtrm §∫ 11·1.

ι ɿ ⁏ ·1 $(\iota x \text{⁏} \iota y) = \iota(x;y)$ ·2 $x;y = \text{ɿ}(\iota x \text{⁏} \iota y)$

·3 $\iota x \text{⁏} \iota y = \iota z \text{⁏} \iota t \,.=.\, x;y = z;t$

$\exists$ ⁏ ·4 $a,b,c,d \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, \exists a \,.\, \exists b \,.\, a;b = c;d \,.\supset.\, a \text{⁏} b = c \text{⁏} d$

{ ·0-·03 F1899 §8. ·1-·4 Padoa RdM t.6 p.120 }

§9 f ɟ

✱ 1. $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.\cdot$

·0 $u \varepsilon\, a \text{ɟ} b \,.=:\, x \varepsilon a \,.\supset_x.\, xu\, \varepsilon b$ Df

·01 $u \varepsilon\, b \mathrm{f} a \,.=:\, x \varepsilon a \,.\supset_x.\, ux\, \varepsilon b$ Df

Note sur les fonctions.

On peut prononcer « fonction » le signe f et « ef » le signe ɟ.

Ces signes permettent de représenter par les symboles idéographiques les idées de « fonction, correspondance, opération » etc.

P·0 " Soient a et b des classes. Nous dirons que u est un aɟb, lorsque, le signe u écrit après un individu quelconque de la classe a produit un b " (P·01) " et que u est un bfa, lorsque le signe u écrit en avant d'un a produit un b ".

Dans les traités d'Analyse on dit que a est la classe des valeurs de la « variable indépendente », et la classe b contient des valeurs de la fonction.

P. ex. soit x un N; $x!$ (factorielle de x) est un N; donc ! ε NɟN. Il est le seul exemple de fonction ɟ répandu en Analyse.

Les expressions $+a$, $-a$, $/a$, ont les significations « ajouter a », « retrancher a », « diviser par a », et l'on a les P § P5·4, §— P1·5, §/ P1·5. Ainsi se présentent naturellement les nombres négatifs et les fractionnaires.

Dans l'usage commun et dans le Form., le signe de fonction précède, en général, la variable.

Ex: mod sgn Φ nt dt E β Chf log sin cos B.

Ici les valeurs de la variable et de la fonction sont des nombres de différentes espèces: N, n, R, Q, q, q′.

Les signes de fonction Num, max, min, Dvr, mlt, l′, l, , précèdent des classes de nombres; la valeur de la fonction est un nombre.

Les signes Med λ δ font correspondre des classes de nombres à d'autres classes.

Une fonction de deux variables est quelquefois représentée par un signe écrit devant le couple des variables. Ex. quot, rest, Cmb, mp.

Dans d'autres cas on place le signe de fonction entre les deux variables; ex. $a+b$, $a-b$, $a\times b$, a/b, $a \uparrow b$; ici a, b, et la valeur de la fonction sont des nombres. Dans $a \cdots b$, $a \vdash b$, $a \frown b$, $a \smile b$, la valeur de la fonction est une Cls. Ont la même forme les « relations » $a = b$, $a \supset b$, $a \varepsilon b$, $a < b$; les signes de relation sont des signes de fonction, dont la valeur est une proposition.

Quelquefois on écrit la variable comme indice à la fonction; nous conviendrons que u_1 u_2 ... ne diffèrent, que par la forme, de $u1$ $u2$ ...

Plusieurs A. ont aujourd'hui l'habitude d'enfermer la variable entre ( ); mais dans la formule $u(x)$ les ( ) n'ont pas la valeur expliquée par §1 P1·2, car une lettre seule ne doit pas être enfermée. Elles ne sont pas nécessaires, puisqu'on écrit $\log x$ et non $\log(x)$, $f(x+h)$ et non $f((x+h))$; elles ne se trouvent pas dans Lagrange, Abel, ... Dans le langage ordinaire la variable est mise au génitif; c'est cela qu'on veut indiquer par les ( ); Legendre a. VI p.135 écrit $f:x$, où les (:) correspondent à « de ». Nous supposons le mot « de » incorporé dans le signe de fonction; ainsi « log », signifie « le logarithme de ».

Les signes f et ɟ se présentent nécessairement lorsqu'on indique par une lettre un signe de fonction; c'est-a-dire lorsqu'on considère une expression dont la valeur dépend de la nature d'une fonction, comme Σ Π lim Dtrm D S.

P. ex: $\Sigma(f,u)$, où $u \varepsilon$ Cls, et $f \varepsilon$ qf$u$, c'est-à-dire f est une fonction numérique définie dans la classe u, indique la somme des valeurs de f, lorsque la variable varie dans la classe u.

Pour quelques formes de la classe u la fonction f dans l'usage commun a des noms particuliers:

$n \varepsilon$ N $.\supset.$ q f $1 \cdots n$ = (succession de n quantités)

qf$(1 \cdots n \,\vdots\, 1 \cdots n)$ = (fonction numérique de deux variables qui prennent les valeurs de 1 à n) = (lettre qui, munie de deux indices variables de 1 à n représente une quantité) = (matrice d'un déterminant d'ordre n.

q f N = (série, ou suite, de quantités) §Lm §lim.

q f(N⁝N) = (série double) §lim P10.

qf $a \vdash b$ = (fonction réelle définie dans l'intervalle de a à b) §cont P2.

On pourrait convenir d'écrire toujours le signe de fonction en avant de la variable (f), ou toujours après (ɟ); nous écrirons les P sous une seule des deux formes; mais nous conservons tous deux les signes f et ɟ.

·1 $u \varepsilon\, a ɟ b \,.\, x,y \varepsilon a \,.\, x = y \,.\supset.\, xu = yu$

[§1 P6·1 $.\supset.$ $x \varepsilon\, z \ni (zu = xu)$. Hp $.\supset.$ $y \varepsilon\, z \ni (zu = xu)$ $.\supset.$ Ths]

·2 $u \varepsilon a$ɟ$b \,.\, c \supset a \,.\supset.\, u \varepsilon c$ɟ$b$ [Hp . $x\varepsilon c \,.\supset.\, x\varepsilon a \,.\supset.\, xu \,\varepsilon b :\supset.$ P]
·3 $u \varepsilon a$ɟ$b \,.\, b \supset c \,.\supset.\, u \varepsilon a$ɟ$c$ [Hp $.\supset:$ $x\varepsilon a \,.\supset.\, xu \,\varepsilon b \,.\supset.\, xu \,\varepsilon c :\supset.$ Ths]

✱ 2. $a,b,c,d \varepsilon$ Cls $.\supset\therefore$
·0 $u \varepsilon a$ɟ$b \,.\, v \varepsilon b$ɟ$c \,.\, x \varepsilon a \,.\supset.\, x(uv) = (xu)v = xuv$ Df
·01 $u \varepsilon b\mathrm{f}a \,.\, v \varepsilon c\mathrm{f}b \,.\, x \varepsilon a \,.\supset.\, (vu)x = v(ux) = vux$ Df
·1 $u \varepsilon a$ɟ$b \,.\, v \varepsilon b$ɟ$c \,.\supset.\, uv \;\varepsilon\; a$ɟ$c$
·2 $u \varepsilon a$ɟ$b \,.\, v \varepsilon b$ɟ$c \,.\, w \varepsilon c$ɟ$d \,.\, x \varepsilon u \,.\supset.\, (xu)(vw) = (xuv)w$

L'opération vu, définie par la P·01 est dite « le produit des opérations u et v ». Dans le calcul différentiel on l'appelle « fonction de fonction ». Si u et v sont des mouvements, et en général des pnt f pnt, vu est dit le mouvement composé. L'expression vux est associative.

{ 1·0-·3, 2·0-·2 F1895 p.6 }

§10 |

·1 $a,b \varepsilon$ Cls $.\, u \varepsilon b\mathrm{f}a \,.\supset.\, (ux)|x = u$ Df
·2 ———— $u \varepsilon a$ɟ$b \,.\supset.\, (|x)(xu) = u$ — { F1898 }

Le signe | est le signe d'inversion.

Soit u un signe de fonction f; ux est une expression contenant x. Réciproquement soit A une expression contenant la lettre variable x; par $A|x$, qu'on peut lire « l'expression A considérée comme fonction de x », nous indiquons le signe de fonction u qui, écrit en avant de x, produit la formule donnée A.

Si l'expression A a la forme ux, on déduit la P·1. Mais on écrit le signe $|x$ après une expression, dans le but de la réduire à la forme ux.

Ex : $a^n / n! \,|n$ représente le signe de fonction qui pour la valeur n de la variable a la valeur $a^n / n!$. Donc $\Sigma(a^n / n! \,|n, \mathrm{N}_0) =$ (somme de la série qu'on obtient de $a^n / n!$ en donnant à n les valeurs 0,1,2... (§e P·6).

Le signe | désigne la variable dans les opérations Σ, Π, lim, D, S.

P·2. « Soit A une formule contenant la lettre variable x; $(|x)A$ désigne le signe de fonction qui écrit après x produit l'expression donnée A ».

Par le signe | on peut indiquer la substitution; car si A est une formule contenant la lettre variable x, $y|xA$ indique « la valeur que prend la fonction $|xA$, pour la valeur y de la variable », ou « ce que devient la formule A, lorsque l'on remplace x par y ». On peut remplacer un couple, un terne, ... par un autre couple ou terne. Ex.: §+ P4·1-·5 Dm, §× P1·41 Dm ...

Dans les formules $ux|x$ $|x(xu)$ $(y|x)(xu)$, la lettre x est apparente.

§11 ' '

ɜ f ' ✱ 1. $a,b,c,d \varepsilon$ Cls $.\, u \varepsilon b\mathrm{f}a \,.\supset.$
·0 $u'a = y\,\varepsilon[\,\exists\, a \frown x\varepsilon(ux = y)\,]$ Df

$\cdot 01 \quad y \varepsilon u`a \;.=.\; \exists\, x \ni (x \varepsilon a \,.\, ux = y)$ [=P·0]

$\cdot 02 \quad x \varepsilon a \,.\, y = ux \;.\supset.\; y \varepsilon u`a$

On peut lire la formule $u`a$ par « $u$ des $a$ » ou « $u$ de quelque $a$ »; on doit la considérer comme décomposée en $(u`)a$. La P·02 dit que la relation $y \varepsilon u`a$ résulte de l'élimination de x dans le système $x\varepsilon a \,.\, ux = y$.

Ex: §Med 3 §Lm §lim 1·5 §cont 1·2 §D 4·5 §S 3·1 ...

Dans plusieurs cas le signe ` est sous-entendu par des conventions exprimées dans la suite: §+ 8·1-·3, §— 2·1, §× 2·0, §/ 2·1...

On ne peut pas le sous-entendre dans tous les cas.

P. ex. Num ` Cls signifie « les valeurs de l'expression Num u, ou u est une classe quelconque »; il représente l'ensemble du nombre 0, des nombres finis, et des différents nombres infinis. Num Cls signifie « le nombre des classes », qui est l'infini le plus grand.

$\cdot 1 \quad x\varepsilon a \;.\supset.\; ux \,\varepsilon\, u`a$ $\qquad \cdot 11 \quad u`a \supset b$

$\cdot 2 \quad c \supset a \;.\supset.\; u`c \supset u`a$

[Hp $.\supset.$ $c \cap x\ni(ux=y) \supset a \cap x\ni(ux=y)$. Oper $\exists$. Oper $y\ni$ $.\supset.$ P]

$\cdot 21 \quad c \supset a \,.\, d \supset a \;.\supset.\; u`(c \cap d) \supset u`c \cap u`d$ [P·2⊃P]

$\cdot 3 \quad \exists\, (u`a) \cap c \;.=.\; \exists\, a \cap x\ni(ux\, \varepsilon c)$ Ex. §Lm P1·1 Dm

[Df ` $.\supset$: $\exists\, (u`a) \cap c \;.=.\; \exists\, c \cap y\ni[\exists\, a \cap x\ni(ux=y)$

§$\exists$ 2·4 $.\supset$: » $\exists\, a \cap x\ni[\exists\, c \cap y\ni(y=ux)]$

Df ι $.\supset$: » » $(\exists\, c \cap \iota ux)$

§ι ·7 $.\supset$: » » $(ux\, \varepsilon c)$]

$\cdot 31 \quad u`a \supset c \;.=:\; x\varepsilon a \,.\supset_x.\, ux\, \varepsilon c$ [(−c | c)P·3 ⊃ P]

$\cdot 4 \quad v \varepsilon \mathrm{cfb} \;.\supset.\; v`(u`a) = (vu)`a$

$\cup$, $\cdot 5 \quad c \supset a \,.\, d \supset a \;.\supset.\; u`(c \cup d) = u`c \cup u`d$

[Df ` $.\supset.$ $u`(c \cup d) = y\ni\, \exists[(c \cup d) \cap x\ni(ux=y)]$

Distrib($\cap$,$\cup$) $.\supset.$ » $y\ni\, \exists[c\, x\ni(ux=y) \cup d\, x\ni(ux=y)]$

Distrib($\exists$,$\cup$) $.\supset.$ » $y\ni[\, [\exists\, c\, x\ni(ux=y)] \cup [\exists\, d\, x\ni(ux=y)]\,]$

Distrib($\ni$, $\cup$) $.\supset.$ » $y\ni[\, \exists\, c\, x\ni(ux=y)\,] \cup y\ni[\, \exists\, d x\ni(ux=y)\,]$

Df ` $.\supset.$ » $u`c \cup u`d$]

$\cdot 6 \quad x\varepsilon a \;.\supset.\; u`\iota x = \iota\, ux$

{ ·0·2·21·3 F1889 p.XV ; ·1·11·6 PADOA F1899 }

* 2.

$\cdot 0 \quad a,b \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u \varepsilon\, a \mathfrak{f} b \;.\supset.\; a'u = y\ni\, \exists\, a \cap x\ni(xu = y)$ Df

$\cdot 1 \quad k \varepsilon \mathrm{Cls} \;.\supset.\; \mathrm{Cls}'k = y\ni\, \exists\, \mathrm{Cls} \cap x\ni(xk = y) = \mathrm{Cls} \cap y\ni(y \supset k)$ Df?

On peut lire $a'u$ par « des a le u ».

En conséquence Cls'k signifie « l'ensemble des valeurs de l'expression xk, où x est une classe » c'est-à-dire, par la §$\exists$ P1·4, « Classe de k ».

Ainsi Cls'N signifie « classe de nombres ». Ex. §max §Dvr §l' ...

§12 f sim rcp idem

$a,b,c\varepsilon$ Cls $.\supset.$

·0 $u\varepsilon\,(bfa)$sim $.=:\ u\varepsilon\, bfa : x,y\varepsilon a\,.\, ux = uy\,.\supset_{x,y}.\ x=y$ Df

·1 $u\varepsilon\,(bfa)$sim $.\ c\supset a\ .\supset.\ u\varepsilon\,(bfc)$sim

·2 » $.\ b\supset c\ .\supset.\ u\varepsilon\,(cfa)$sim

·3 » $.\ x,y\varepsilon a\ .\supset: x=y\ .=.\ ux = uy$

·4 » $.\ v\varepsilon\,(cfb)$sim $.\supset.\ vu\ \varepsilon\,(cfa)$sim

Le signe sim ou Sim signifie « correspondance semblable (similis) ».
Ex.: §+ P5·2·5, §Q P33·0, §lim P10·4.

·5 $u\varepsilon\,(bfa)$rcp $.=.\ u\varepsilon\,(bfa)$sim $.\ b\supset u\text{‘}a$ Df

·6 $u\varepsilon(bfa)$rcp $.\ v\varepsilon\,(cfb)$rcp $.\supset.\ vu\ \varepsilon\,(cfa)$rcp

·7 $u\varepsilon\,(bfa)$sim $.\supset.\ u\varepsilon\,(u\text{‘}a\ \mathrm{f}\ a)$rcp

{ ·0-·7 F1895 p.116, F1897 P521 }

Le signe « rcp » signifie « correspondance réciproque ».
Ex. §Num P·0 : $a,b\varepsilon$ Cls $.\supset:$ Num$a$ = Num$b$ $.=.\ \exists\,(bfa)$rcp
§Σ P1·2·5·7, §Π P1·2, §lim P18·2·3 ...
On suppose écrites les formules correspondantes pour le signe ɟ.

·8 idem$x = x$ Df {F1899}

idem $\varepsilon\, afa$. idem $\varepsilon\,(afa)$sim . idem $\varepsilon\,(afa)$rcp . idem‘$a = a$

« idem » représente l'identité; telles sont les opérations Arithmétiques +0, —0, ×1, /1, ⌈1, ¹√, ... Dans la théorie des Substitutions l'identité est indiquée simplement par 1. Seul ex. §Σ P1·71.

§13 Variab F Funct

·1 $u,v\varepsilon$ Cls $.\ f\varepsilon\, vfu\ .\ x\varepsilon u\ .\supset.\ (f;u)x = fx$ Df

·2 ———— . ——— $.\supset.$ Variab$(f;u) = u$ Df

·3 ———— $.\supset.\ v\mathrm{F}u = g\ni\{\exists\, vfu \frown f\ni[g = (f;u)]\}$ Df

·4 Funct $= g\ni\ \exists\ (u;v)\ni[u,v\varepsilon$ Cls $.\ g\varepsilon\, v\mathrm{F}u]$ Df

·5 $f,g\varepsilon$ Funct $.\supset:$

$f=g\ .=:$ Variab$f$ = Variab$g$ $: x\varepsilon$ Variab$f\,.\supset_x.\, fx = gx$ Df

·6 $u,v\varepsilon$ Cls $.\supset.\ v\mathrm{F}u \supset vfu$ [P·1 . §f P1·01 $.\supset.$ P]

·7 $u\varepsilon$ Cls $.\ x\varepsilon u\ .\supset.\ [\iota(\iota a\mathrm{F}u)]x = a$ { ·1-·7 F1899 }

Soient u et v des Cls; et $f\varepsilon\, vfu$. Si l'on donne l'opération f, la classe dans laquelle l'opération est définie n'est pas déterminée; car si l'opération est définie dans la classe u, elle est aussi définie dans toute classe contenue dans u, par la §f P·2, et il y a toujours la possibilité de la définir dans toute classe différente. P. ex. l'opération « mod » dans §mod P·0 est définie sur les nombres relatifs ; en conséquence elle est définie sur les nombres positifs, et dans ce cas coïncide avec l'identité ; ensuite la même opération

est définie sur les les nombres complexes d'ordre quelconque, sur les substitutions, sur les vecteurs, et on est toujours en droit de l'employer dans des nouveaux cas, présentant quelque analogie, et jamais de contradiction, avec les anciens.

Dans quelques cas il faut considérer en même temps une opération f et une classe u dans laquelle cette opération est définie; c'est à dire le couple $(f;u)$. On rencontre ce couple dans les formules $\Sigma(f,u)$, $\Pi(f,u)$, qui représentent la somme, ou le produit des valeurs de la fonction f, lorsque la variable prend toutes les valeurs dans la classe u, et dans $S(f,u)$, qui représente l'intégrale de f, étendue au domaine u de variabilité.

P·1. A l'expression $(f,u)x$, où u est une classe, f une opération sur les u, et x un u, nous donnons la signification fx.

P·2. Par variabilité de (f,u) nous entendons la classe u.

P·3. $v\mathrm{F}u$ (v fonction définie des u) indique les couples formés d'une vfu et de la classe u.

P·4. « Funct » indique toutes les expressions de la forme $v\mathrm{F}u$, où u et v sont des classes.

P·5. Deux Fonctions définies sont égales, lorsqu'elles ont la même variabilité, et dans cette variabilité produisent des résultats égaux.

P·6. Toute F est f. Nous parlerons donc des Fonctions sim, rcp, etc.

Ex: (mod, Q) = (idem, Q)

« Les fonctions mod et idem, dans la classe Q, coïncident ».

Voir une autre façon de considérer l'égalité des fonctions dans Burali, RdM t.6 p.141.

$$m,n\varepsilon \mathrm{N} \,.\supset.\, \mathrm{Num}\,(1\cdots m \;\mathrm{F}\; 1\cdots n) = m^n$$
$$\mathrm{Num}\,(1\cdots m \;\mathrm{F}\; 1\cdots n)\mathrm{sim} = \Pi[m-0\cdots(n-1)]$$
$$\mathrm{Num}\,(1\cdots n \;\mathrm{F}\; 1\cdots n)\mathrm{rcp} = n!$$

$1\cdots m\,\mathrm{F}\,1\cdots n$ = arrangements avec répétition n à n des nombres $1\cdots m$.

$(1\cdots m\,\mathrm{F}\,1\cdots n)\mathrm{sim}$ » » simples »

$(1\cdots n\,\mathrm{F}\,1\cdots n)\mathrm{rcp}$ = permutations des nombres $1\cdots n$.

Ex. §Σ20 §Π10 11, §! 2 §q$_n$ 1·0 §perm ·0 §Dtrm §Subst §D 1·2.

§14 $^{-1}$ (inversion)

$a,b\varepsilon$ Cls . $u\varepsilon(b\mathrm{F}a)\mathrm{rcp}$.⊃.

·0 $u^{-1} = \iota\,[(\mathrm{Variab}\,u)\mathrm{F}(u\text{‘}\,\mathrm{Variab}\,u)] \cap v\ni(vu = (\mathrm{idem}, \mathrm{Variab}\,u)$ Df

·01 $u^{-1} = \iota\,(a\mathrm{F}b) \cap v\ni[vu = (\mathrm{idem}, a)]$

·1 $u^{-1}u = (\mathrm{idem}, a)$ ·2 $x\varepsilon a$.⊃. $u^{-1}ux = x$ ·3 $(u^{-1})^{-1} = u$

·4 $a,b,c\varepsilon$ Cls . $u\varepsilon\,(b\mathrm{F}a)\mathrm{rcp}$. $v\varepsilon\,(c\mathrm{F}b)\mathrm{rcp}$.⊃. $(vu)^{-1} = u^{-1}\,v^{-1}$

·5 $a\varepsilon$ Cls . $u,v\varepsilon\,(a\mathrm{F}a)\mathrm{rcp}$. $uv = vu$.⊃. $u^{-1}\,v = v\,u^{-1}$

·6 » » » » $u^{-1}\,v^{-1} = v^{-1}\,u^{-1}$

Il faut considérer l'exposant —1 comme un signe simple pour indiquer l'inversion. Voir F1897 p.61.

ALCUNI TEOREMI DI ARITMETICA.

Fra le proposizioni che a mio parere potrebbero convenientemente trovar posto nel *Formulaire de mathématiques*, pubblicato dalla *Revue de mathématiques*, credo siano da annoverarsi le seguenti.

La maggior parte di esse si riferisce a questioni sulla divisibilità, sul massimo comun divisore dei numeri interi, e sui numeri primi. I paragrafi in cui sono divise, ed i numeri d'ordine che le classificano indicano il posto che devono occupare in una nuova edizione del *Formulaire de mathématiques*. Altre proposizioni formano il § 68 Nprf.

Varie proposizioni sono anche trascritte in linguaggio ordinario; in queste trascrizioni adopero spesso, per brevità, la parola « *numero* » invece di « *numero intero positivo* ». Però, come si scorge facilmente confrontando la trascrizione in simboli di logica e la trascrizione in linguaggio ordinario d' una medesima proposizione, quest' ultima è sempre meno rigorosa della prima; e quest' inconveniente non si può evitare senza complicare considerevolmente l'enunciato delle proposizioni.

§ 25. $\times$

3·3 $2N_0+1 = 4N_0+1 \cup 4N_1-1$

§ 29. $\uparrow$

1·7 $a \varepsilon N_0 . \supset . (10N_0+a)^5 \supset 10N_0+a$

4·12 $n \varepsilon N_1 . \supset . (N_0^2+N_0^2+N_0^2)^n \supset N_0^2+N_0^2+N_0^2$

6·0 $a \varepsilon N_0 . \supset . a(a+1)(a+2)(a+3)+1 \, \varepsilon \, N_1^2$

6·01 $a \varepsilon N_1 . \supset . a(a+1) - \varepsilon \, N_1^2 \, . \, a(a+1)(a+2) - \varepsilon \, N_1^2 .$
$a(a+1) - \varepsilon \, N_1^3 . a(a+1)(a+2) - \varepsilon \, N_1^3$ {cont. §Π P1·92}

6·02 $a,b,c \, \varepsilon \, 2N_0+1 . \supset . ab+ac+bc - \varepsilon \, N_1^2$

6·1 $10N_0+2 \cup 10N_0+3 \cup 10N_0+7 \cup 10N_0+8 \supset -N_0^2$

6·2 $a \varepsilon N_1 . \supset . (10a+5)^2 = a(a+1) \times 100+25$

6·3 $a,b,c \, \varepsilon \, N_1 . a^2 = b^2+c^2 . \supset . b \, \varepsilon \, 3N_1 \cup c \, \varepsilon \, 3N_1 \, . \, b \, \varepsilon \, 4N_1 \cup c \, \varepsilon \, 4N_1 .$
$a \, \varepsilon \, 5N_1 \cup b \, \varepsilon \, 5N_1 \cup c \, \varepsilon \, 5N_1 \, . \, abc \, \varepsilon \, 60N_1$

6·4 $a \varepsilon N_0 . n \varepsilon \, 2N_1 . \supset . (100a+24)^n \, \varepsilon \, 100N_1+76$

6·41 $a \varepsilon N_0 . n \varepsilon \, 2N_1+1 . \supset . (100a+24)^n \, \varepsilon \, 100N_1+24$

6·42 $a \varepsilon N_0 . n \varepsilon N_1 . \supset . (100a+76)^n \, \varepsilon \, 100N_0+76$

6·43 $a \varepsilon N_0 \,.\, n \varepsilon N_1+1 \;.\supset.\; (100a+26)^n \,\varepsilon\, 100N_1+76$

11·8 $4N_0 \supset N_0^2 - N_0^2$

11·81 $n \varepsilon N_1+1 \;.\supset.\; N_0^n \supset N_0^2 - N_0^2$

11·82 $N_1^3 \supset 7N_1 \cup (7N_1+1) \cup (7N_1-1)$

11·83 $N_1^3 \supset 9N_1 \cup (9N_1+1) \cup (9N_1-1)$

11·84 $a \varepsilon (2N_0+1) - (5N_0) \;.\supset.\; a^4-1 \,\varepsilon\, 80N_0$

11·85 $n \varepsilon N_0 \;.\supset.$

$$2^{n+2}+3^{2n+1} \,\varepsilon\, 7N_1 \;.\; 2^{6n+1}+3^{2n+2} \,\varepsilon\, 11N_1 \;.\; 2^{6n+3}+3^{4n+2} \,\varepsilon\, 17N_1 \,.$$
$$2^{3n+1}+3\times 5^{2n+1} \,\varepsilon\, 17N_1 \,.\, 2^{n+1}+2^{n+4}+5^{2n+1} \,\varepsilon\, 23N_1 \,.\, 11^{2n}-2^{6n} \,\varepsilon\, 57N_1 \,.$$
$$2^{8n+2}+7^{4n+4} \,\varepsilon\, 65N_1 \;.\; 3^{12n+6}+1 \,\varepsilon\, 730N_1 \;.\; 2^{2n}-3n-1 \,\varepsilon\, 9N_0 \,.$$
$$2^{3n+2}+21n-4 \,\varepsilon\, 49N_0 \;.\; 3^{2n}-8n-1 \,\varepsilon\, 64N_0 \;.\; 2^{4n}-15n-1 \,\varepsilon\, 225N_0 \,.$$
$$7^{2n+1}-48n-7 \,\varepsilon\, 288N_0$$

11·86 $n \,\varepsilon\, N_1 \;.\supset.\; 3^{3n-3}+7^n \times 2^{3n-1} \,\varepsilon\, 29N_1 \;.\; 2^{5n}\times 3^{4n}-4^{3n}\times 5^{2n} \,\varepsilon\, 992N_1$

15·9 $a,b \,\varepsilon\, \mathrm{n} \,.\, m \,\varepsilon\, N_1 \;.\supset.\; a^m-b^m \,\varepsilon\, \mathrm{n}\times(a-b) \,.\, a^{2m}-b^{2m} \,\varepsilon\, \mathrm{n}\times(a+b) \,.$
$a^{2m+1}+b^{2m+1} \,\varepsilon\, \mathrm{n}\times(a+b)$

15·91 $a \,\varepsilon\, \mathrm{n} \,.\, n \varepsilon N_1 - 3N_1 \;.\supset.\; a^{2n}+a^n+1 \,\varepsilon\, N_1 \times (a^2+a+1)$

15·92 $a,b \,\varepsilon\, \mathrm{n} \;.\supset.\; ab(a+b)(a-b) \,\varepsilon\, 6\mathrm{n}$

$a \,\varepsilon\, \mathrm{n} \;.\supset.$

16·0 $a(a^2-1) \,\varepsilon\, 6\mathrm{n}$ 16·1 $a(a^2-1)(a^2-4) \,\varepsilon\, 120\mathrm{n}$ Cont §! P·2

16·2 $a(a^{12}-1) \,\varepsilon\, 2730\mathrm{n}$

$a \,\varepsilon\, 2\mathrm{n}+1 \;.\supset.$

16·3 $a(a^4-1) \,\varepsilon\, 240\mathrm{n}$

16·4 $a^2(a^2-1)(a^4-1) \,\varepsilon\, 5760\mathrm{n}$

16·5 $a^2(a^2-1)(a^6-1) \,\varepsilon\, 4032\mathrm{n}$

16·6 $a^2(a^4-1)(a^8-1) \,\varepsilon\, 115200\mathrm{n}$

Note.

1·7. La quinta potenza di un numero (N_0) è terminata colla medesima cifra di questo numero. Ne segue che se si scrivono per ordine le successive potenze intere positive di un numero intero (N_0), l'ultima cifra d'una di esse, si ritrova periodicamente come ultima cifra di ogni quarto numero successivo. Es. per le potenze di 2 si ha : 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192,.....

6·0. Se si aumenta di un'unità il prodotto di quattro numeri interi consecutivi (N_0), si ottiene per somma un quadrato (N_1^2).

6·1. Un numero intero (N_1) che termini per 2, o per 3, o per 7 o per 8, non può essere un quadrato.

6·2. Per fare il quadrato di un numero intero (N_1), che termini per 5, basta moltiplicare il numero delle decine pel numero successivo, e scrivere 25 alla destra del prodotto.

6·4—41. Se un numero intero (N_1) termina per 24, la sua potenza enne-

sima ($n \varepsilon N_1$) termina per 76 o per 24 secondochè n è un numero pari od un numero dispari.

6·42. Se un numero intero (N_1) termina per 76, la sua potenza ennesima ($n \varepsilon N_1$) termina per 76.

6·43. Se un numero intero (N_1) termina per 26, la sua potenza ennesima ($n \varepsilon N_1 + 1$) termina per 76.

§30. $\leq$ $>$

7·6 $a \varepsilon R - \iota 1 \,.\supset.\, a + /a > 2$

La somma di due numeri reciproci interi o frazionarii (R) diversi dall'unità è maggiore di 2.

§31. ···

2·0 $a,b \,\varepsilon\, 0\cdots 9 \,.\, a \geq b \,.\supset.\, (10a+b)-(10b+a) = 9(a-b)$

2·1 $a,b,c \,\varepsilon\, 0\cdots 9 \,.\, a \geq c \,.\supset.$
$(100a+10b+c)-(100c+10b+a) = 99(a-c)$

2·2 $a,b,c,m,n,p \,\varepsilon\, 0\cdots 9 \,.\, a \geq c \,.\, (100a+10b+c)-(100c+10b+a) =$
$100m+10n+p \,.\supset.\, n = m+p = 9$

Note.

2·0 La differenza fra un numero (N_1) di due cifre, ed il medesimo numero rovesciato è eguale a 9 volte la differenza delle due cifre del numero dato.

2·1—2 La differenza fra un numero (N_1) di tre cifre, ed il medesimo numero rovesciato, è eguale a 99 volte la differenza delle due cifre estreme del numero dato; ed ha 9 per cifra delle decine, e 9 per somma delle sue due cifre estreme.

§32. Num infn

·9 $a \,\varepsilon\, N_1^2 \,.=.\, \text{Num}\, N_1 \cap (a/N_1) \,\varepsilon\, 2N_0+1$

§33. Σ

11·4 $n \,\varepsilon\, N_1 \,.\supset.\, \Sigma(1\cdots 10^n) = 5\times 10^{n-1} \times 10^n + 5\times 10^{n-1}$

11·5 $n \,\varepsilon\, N_1 \,.\supset.\, \Sigma(1\cdots 10^n)^2 = \Sigma[3.10^r | r, 0\cdots(n-1)]\times 10^{2n} + 8\times 10^{2n-1}$
$+\Sigma[3\times 10^r | r, 0\cdots(n-2)]\times 10^n + 5\times 10^{n-1}$

11·6 $a \,\varepsilon\, (2N_0+1) - (5N_1) \,.\supset.\, \exists(x,m) \ni [x,m \,\varepsilon\, N_1 \,.\, ax = \Sigma(10^r | r, 0\cdots m)]$

11·7 $a \,\varepsilon\, N_1 \,.\supset.\, \exists(m,n,x) \ni \{n \,\varepsilon\, N_0 \,.\, x,m \,\varepsilon\, N_1 \,.$
$ax = [\Sigma(9\times 10^r | r, 0\cdots m)]\times 10^n\}$

11·8 $\{\Sigma[9\times 10^r | r, 0\cdots(n-1)]\}\times\{\Sigma[7\times 10^r | r, 0\cdots(n-1)]\} =$
$\{\Sigma[7\times 10^r | r, 0\cdots(n-2)]\}\times 10^{n+1} + 6\times 10^n + \{\Sigma[2\times 10^r | r, 0\cdots(n-2)]\}$
$\times 10 + 3$ {IBN ALBANNA}

11·9 $\{\Sigma[9\times 10^r | r, 0\cdots(n-1)]\}^2 = \{\Sigma[9\times 10^r | r, 0\cdots(n-2)]\}\times 10^{n+1}$
$+8\times 10^n + 1$ {IBN ALBANNA}

11·91 $a = \Sigma[4\times 10^r | r, 0\cdots(2n-1)] \,.\, b = \Sigma[4\times 10^r | r, 0\cdots(n-1)] \,.\supset.$
$a+b+1 \,\varepsilon\, N_1^2$

11·92 $a = \Sigma[10^r|r,0\cdots(2n-1)\} . b = \Sigma[4\times 10^r|r,0\cdots(n-1)] .\supset. a+b+1 \,\varepsilon\, N_1^2$

11·93 $a \,\varepsilon\, N_1 . n \,\varepsilon\, 4N_1 .\supset. \Sigma[(a+x)^n|x,0\cdots 9] \,\varepsilon\, 10N_1+3$

11·94 $a,n \,\varepsilon\, N_1 . n -\varepsilon\, 4N_1 .\supset. \Sigma[(a+x)^n|x,0\cdots 9] \,\varepsilon\, 10N_1+5$

11·95 $a,n \,\varepsilon\, N_1+1 .\supset. \exists\, N_1 \frown m \ni [a^n = \Sigma \{2(m+x)+1|x,1\cdots a\}$

11·96 $a,m,n \,\varepsilon\, N_1 . x \varepsilon [0\cdots(10^n-1)]F(1\cdots m) . 10^n-1 \,\varepsilon\, N_1\times a . b = \Sigma(x_r\times 10^{nr}|r, 0\cdots m) . \Sigma x \,\varepsilon\, N_1\times a .\supset. b \,\varepsilon\, N_1\times a$

{ Abbé E. Gelin. — Traité d'Arithmétique Élémentaire — Huy a.1897 p.99 }.

11·97 $a,m,n,p \,\varepsilon\, N_1 . n = p\pm 1 . x \,\varepsilon\, [0\cdots(10^m-1)]F(1\cdots n) . y \,\varepsilon\, [0\cdots(10^m-1)]F(1\cdots p) . 10^m+1 \,\varepsilon\, N_1\times a . b = \Sigma(x_r\times 10^{m(2r)}| r, 0\cdots n)+\Sigma(y_r\times 10^{m(2r+1)}|r, 0\cdots p) . \Sigma x-\Sigma y \,\varepsilon\, N_1\times a .\supset. b \,\varepsilon\, N_1\times a$ { Gelin. l. c. P100 }

Note.

11·4 Per avere la somma dei numeri interi da 1 a 10^n ($n\varepsilon N_1$), basta scrivere 5, poi $n-1$ zeri, poi 5, poi $n-1$ zeri. Es. la somma dei numeri inter da 1 a 10^3 è 500500.

11·5. Per avere la somma dei quadrati dei primi 10^n numeri interi ($n\varepsilon N_1$), basta scrivere n volte il 3, poi 8, poi $n-1$ volte il 3, poi 5, poi $n-1$ zeri. Es. la somma dei quadrati dei primi mille numeri interi ($1000 = 10^3$), è 333 833 500.

11·6. Ogni numero dispari ($2N_0+1$) che non termini per 5 ha un multiplo formato con sole cifre 1.

11·7. Ogni numero intero (N_1) ha un multiplo formato con sole cifre 9, seguite o non da zeri.

11·8. Il prodotto di un numero intero (N_1) formato da n cifre 9 ($n\varepsilon N_1$) per un numero intero (N_1) formato da n cifre 7, si ottiene scrivendo $n-1$ cifre 7, poi 6, poi $n-1$ cifre 2, poi 3. Es. $9999\times 7777 = 77762223$.

11·9. Per avere il quadrato di un numero intero (N_1) formato da n cifre 9 ($n\varepsilon N_1$), basta scrivere $n-1$ cifre 9, poi 8, poi $n-1$ zeri, poi 1. Esempio $9999^2 = 99980001$.

11·91. La somma di un numero intero (N_1) formato da $2m$ cifre 4 ($m\varepsilon N_1$)i e di un numero intero (N_1) formato da m cifre 4, aumentata di 1, è un quadrato. Es. $4444+44+1 = 4489 = 67^2$.

11·92. La somma di un numero intero (N_1) formato da $2m$ cifre 1 ($m\varepsilon N_1$) e di un numero intero formato da m cifre 4, aumentata di 1, è un quadrato. Es. $111111+444+1 = 111556 = 334^2$.

11·93—4. La somma delle potenze simili di dieci numeri interi consecutivi (N_1) termina per 3 o per 5 secondochè l'esponente della potenza è divisibile o non è divisibile per 4.

11·95. Qualsiasi potenza ad esponente intero, positivo, maggiore dell'u-

nità, di un numero intero a ($a \varepsilon N_1$), è la somma di a numeri dispari consecutivi.

11·96. Un numero intero (N_1) è divisibile pel numero intero a ($a \varepsilon N_1$) se a divide $10^n - 1$ ($n \varepsilon N_1$), e se a divide anche la somma dei gruppi di n cifre in cui si può scomporre il numero dato, partendo da destra. (L'ultimo gruppo a sinistra può anche avère meno di n cifre).

Sia p. e. $n=1$, sarà $10^n - 1 = 9 = 3^2$; ed avremo: *Un numero é divisibile per 3 o per 9 se è divisibile per 3 o per 9 la somma delle cifre del numero dato.*

Sia p. e. $n=2$, sarà $10^n - 1 = 99 = 3^2 \times 11$; ed avremo: *Un numero è divisibile per 11 o per 33 o per 99 se è divisibile per 11, per 33 o per 99 la somma dei gruppi di due cifre in cui si può scomporre il numero dato, partendo da destra.* E così di seguito.

11·97. Un numero intero (N_1) è divisibile pel numero intero a ($a \varepsilon N_1$), se a divide $10^m + 1$ ($m \varepsilon N_1$), e se scomponendo il numero dato in gruppi di m cifre, a partire da destra, la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari, e la somma dei gruppi di posto pari, è divisibile per a. (L'ultimo gruppo a sinistra può aver meno di m cifre).

Sia p. e. $m=1$, sarà $10^m + 1 = 11$; ed avremo: *Un numero è divisibile per 11 se, scomponendo il numero in gruppi di due cifre a partire da destra, la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari, e la somma dei gruppi di posto pari è divisibile per 11.*

Sia p. e. $m=3$, sarà $10^m + 1 = 1001$. I divisori di 1001 sono 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001; e quindi avremo: *Un numero è divisibile per 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001, se, scomponendo il numero in gruppi di tre cifre a partire da destra, la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari, e la somma dei gruppi di posto pari, è divisibile per* 7, *11, 13,* 77, *91, 143, 1001.* E così di seguito.

§34 Π

1·9 $\quad n \varepsilon N_1 + 1 \;.\supset.\; \Pi[(2+4x)|x, 0 \cdots (n-1)] = \Pi[(n+1) \cdots 2n]$

1·91 $\quad n \varepsilon N_1 + 1 \;.\supset.\; \Pi[(n+1) \cdots 2n] = \{\Pi[(2x-1)|x, 1 \cdots n]\} \times 2^n$

{ Klügel a.1803 t.1 p.313. }

1·92 $\quad m \varepsilon N_1 \,.\, n \varepsilon N_1 + 1 \;.\supset.\; \Pi[m+(1 \cdots n)] - \varepsilon\, N_1 \upharpoonright (N_1+1)$

Note.

1·9. Il prodotto dei primi n termini ($n \varepsilon N_1$) della progressione aritmetica ÷ 2. 6. 10. 14.... è eguale al prodotto dei primi n numeri interi consecutivi che seguono n. Es. $2 \times 6 \times 10 \times 14 \times 18 = 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$.

1·91. Il prodotto dei primi n numeri interi consecutivi che seguono n ($n \varepsilon N_1$) è eguale a 2^n moltiplicato pel prodotto dei primi n numeri dispari. Es. $6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 2^5 \times 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9$.

1·92. Il prodotto di quanti si voglia numeri interi consecutivi non può mai essere eguale ad una potenza ad esponente intero, positivo, maggiore di 1.

§42. max min

15·3 $a \varepsilon N_1 . m \varepsilon N_1+1 . \text{Num}\, N_1 \frown (a/N_1) = m . r \varepsilon 1 \cdots m . \supset .$
$\min_r(N_1 \frown a/N_1) \times \min_{m-r}(N_1 \frown a/N_1) = a$

Nota.

15·3 Se si dispongono per ordine di grandezza tutti i divisori di un numero (N_1), il prodotto di due divisori equidistanti dagli estremi è eguale a numero dato.

§43 quot rest

3·0 $a,b,c\, \varepsilon N_1 . \supset . \text{rest}(a+b, c) = \text{rest}[\text{rest}(a,c) + \text{rest}(b,c), c]$

3·1 $a \varepsilon N_1 . m \varepsilon N_1+1 . x \varepsilon N_1 F 1 \cdots m . \supset . \text{rest}(\Sigma x, a) =$
$\text{rest}[\Sigma(\text{rest}\{x,a\}, a)]$

3·2 $a,b,c\, \varepsilon N_1 . \supset . \text{rest}(ab, c) = \text{rest}[\text{rest}(a,c) \times \text{rest}(b,c), c]$

3·21 $a \varepsilon N_1 . m \varepsilon N_1+1 . x \varepsilon N_1 F 1 \cdots m . \supset . \text{rest}(\Pi x, a) =$
$\text{rest}[\Pi(\text{rest}\{x,a\}, a)]$

3·3 $a,b,c,d\, \varepsilon N_1 . \text{rest}(a,c) = \text{rest}(b,c) . \supset . \text{rest}(a+d, c) = \text{rest}(b+d, c)$

3·4 » » » » $\text{rest}(ad, c) = \text{rest}(bd, c)$

3·5 $a,b,c,d\, \varepsilon N_1 . a > d . b > d . \text{rest}(a,c) = \text{rest}(b,c) . \supset .$
$\text{rest}(a-d, c) = \text{rest}(b-d, c)$

3·6 $a,b,c\, \varepsilon N_1 . \supset . \text{rest}(a, bc) = \text{rest}(a,b) + \text{rest}[\text{quot}(a,b), c] \times b$

3·7 $a,b,c,d\, \varepsilon N_1 . \supset . \text{rest}(a, bcd) = \text{rest}(a,b) + \text{rest}[\text{quot}(a,b), c] \times b +$
$\text{rest}\{\text{quot}[\text{quot}(a,b), c], d\} \times bc$

3·8 $a,b\, \varepsilon N_1 . a > b . \supset . \text{rest}(a, a-b) = \text{rest}(b, a-b)$

3·81 $a,b,c,m\, \varepsilon N_1 . \supset : \text{rest}(a,c) = \text{rest}(b,c) . = . \text{rest}(a+m, c) =$
$\text{rest}(b+m, c)$

3.82 » » » $. \supset . \text{rest}(am, c) =$
$\text{rest}(bm, c)$

3·83 $a,b,m\, \varepsilon N_1 . a > b . \supset . \text{rest}(a^m, a-b) = \text{rest}(b^m, a-b)$

3·84 $a\, \varepsilon N_1 . \supset . \text{rest}(a,6) = \text{rest}(a^3,6) \;.\; \text{rest}(a^2,4) = \iota 0 \cup \iota 1$

3·85 $a,b,m\, \varepsilon N_1 . \supset : \text{quot}(a,b) = \text{quot}(a, b+m) . = . \text{rest}(a,b) \geq$
$[\text{quot}(a,b)] \times m$

3·86 $a,b,m\, \varepsilon N_1 . b > m . \supset : \text{quot}(a,b) = \text{quot}(a, b-m) . = .$
$b - \text{rest}(a,b) > [\text{quot}(a,b)+1] \times m$

3·87 $a,b,m\, \varepsilon N_1 . \supset : \text{quot}(a,b) = \text{quot}(a+m, b+m) . = . \text{rest}(a,b) \leq$
$[\text{quot}(a,b)-1] \times m$

3·90 $a,b\, \varepsilon N_1 . \supset . \max N_1 \frown x \ni \{\text{quot}(a+x,b) = \text{quot}(a,b)\} =$
$b - \text{rest}(a,b) - 1$

3·91 $a,b\, \varepsilon N_1 . a > b . \supset . \text{quot}(a, a-b) - \text{quot}(b, a-b) = 1$

3·92 $a,b,c \varepsilon N_1 . a>b . \mathrm{rest}(a,c) = \mathrm{rest}(b,c) . \supset . a-b \varepsilon N_1 \times c$

3·93 $a,b,c \varepsilon N_1 . \mathrm{rest}(a,c)+\mathrm{rest}(b,c) \varepsilon N_1 \times c . \supset . a+b \varepsilon N_1 \times c$

3·94 $a \varepsilon N_1 . n \varepsilon N_1+1 . u \varepsilon N_1 F 1 \cdots n . \supset : \Sigma u \varepsilon N_1 \times a .=. \Sigma\, \mathrm{rest}(u,a) \varepsilon N_1 \times a$

3·95 $a,b,n \varepsilon N_1 . x \varepsilon [0 \cdots (10^n-1)] . 10^n \varepsilon N_0 \times b . \supset . \mathrm{rest}(x,b) = \mathrm{rest}(a \times 10^n + x,\ b)$

3·96 $a,m,n \varepsilon N_1 . x \varepsilon [0 \cdots (10^n-1)] F(1 \cdots m) . 10^n-1 \varepsilon N_1 \times a . \supset . \mathrm{rest}(\Sigma x, a) = \mathrm{rest}[\Sigma(x_r \times 10^{nr} | r, 0 \cdots m), a]$

3·97 $a,m,n,p \varepsilon N_1 . n = p \pm 1 . x \varepsilon [0 \cdots (10^m-1)] F(1 \cdots n) . y \varepsilon [0 \cdots (10^m-1)] F(1 \cdots p) . 10^m+1 \varepsilon N_1 \times a . \supset . \mathrm{rest}(\Sigma x - \Sigma y, a) = \mathrm{rest}[\Sigma(x_r \times 10^{m(2r)} | r, 0 \cdots n) + \Sigma(y_r \times 10^{m(2r+1)} | r, 0 \cdots p), a]$

Note.

3·1. Il resto che si ottiene dividendo una somma di più numeri (N_1) per un numero a ($a \varepsilon N_1$) è il medesimo che si ottiene quando si divide per a la somma dei resti ottenuti dividendo ciascun numero dato per a.

3·21. Il resto che si ottiene dividendo un prodotto di più numeri (N_1) per un numero a ($a \varepsilon N_1$) è il medesimo che si ottieue quando si divide per a il prodotto dei resti ottenuti dividendo ciascun numero dato per a.

3·85. Affinchè il quoto di due numeri (N_1) non cambi quando si aumenta il divisore di m unità ($m \varepsilon N_1$) è necessario e sufficiente che il resto della divisione dei due numeri dati sia maggiore od uguale ad m volte il loro quoto.

3.86. Affinchè il quoto di due numeri (N_1) non cambi togliendo m unità ($m \varepsilon N_1$) al divisore, è necessario e sufficiente che la differenza fra il divisore ed il resto sia maggiore di m volte il quoto aumentato di 1.

3·87. Affinchè il quoto di due numeri (N_1) non cambi aggiungendo m unità ($m \varepsilon N_1$) al dividendo ed al divisore, è necessario e sufficiente che il resto sia minore od eguale ad m volte il quoto diminuito di 1.

3·90. Il più grande numero (N_1) che si può aggiungere al dividendo senza alterare il quoto è eguale al divisore meno il resto, meno 1.

3·94. Affinchè la somma di più numeri (N_1) sia divisibile pel numero a ($a \varepsilon N_1$), è necessario e sufficiente che sia divisibile per a la somma dei resti che si ottengono dividendo per a ciascuno dei numeri dati.

3·95. Se il numero b ($b \varepsilon N_1$) divide 10^n ($n \varepsilon N_1$), il resto che si ottiene dividendo un numero (N_1) per b è il medesimo che si ottiene dividendo per b il numero formato dalle ultime n cifre a destra del numero dato.

Es. se $n=1$, i divisori di 10^n sono 2, 5, 10, e si ha: *Il resto che si ottiene dividendo un numero per 2 o per 5 o per 10 è il medesimo che si ottiene dividendo per 2 o per 5 o per 10 l'ultima cifra a destra del numero dato.*

3·96. Se il numero a ($a \varepsilon N_1$) divide 10^n-1, ($n \varepsilon N_1$) il resto che si ottiene dividendo un numero (N_1) per a è il medesimo che si ottiene dividendo

per a la somma dei gruppi di n cifre in cui si può scomporre il numero dato, partendo da destra. (L'ultimo gruppo a sinistra può avere meno di n cifre).

Es. se $n=1$, $10^n-1=9$, e si ha: *Il resto che si ottiene dividendo un numero per 3 o per 9 è il medesimo che si ottiene dividendo per 3 o per 9 la somma delle cifre del numero dato.*

3·97. Se il numero a ($a\varepsilon N_1$) divide 10^n+1, ($n\varepsilon N_1$) il resto che si ottiene dividendo un numero (N_1) per a è il medesimo che si ottiene scomponendo il numero in gruppi di n cifre a partire da destra, e dividendo per a la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari, e la somma dei gruppi di posto pari. (L'ultimo gruppo a sinistra può avere meno di n cifre).

Es. se $n=1$, $10^n+1=11$, e si ha: *Il resto che si ottiene dividendo un numero per 11 è il medesimo che si ottiene dividendo per 11 la differenza fra la somma delle cifre di posto dispari, e la somma delle cifre di posto pari del numero dato.*

§44 Dvr

$N_1 \times$ Dvr

$a,b,m,n\ \varepsilon N_1 . \supset :$

1·44 $D(a,b)=1 . D(b,m)=1 . D(a,n)=1 . \supset . D(ab, am+bn)=1$

1·45 $D(a,b)=1 . \supset . D(a+b, ab)=1$

1·46 $a>b . D(a,b)=1 . \supset . D(a-b, ab)=1$

1·47 $D(a,b) = D(a+bm, a+bm+b)$

1·48 $D(a,b) = D(a+bm, a+bm-b)$

1·91 $D(a,b) = D[b, b-\text{rest}(a,b)]$

1·92 $a>b . D(a,10)=D(b,10)=1 . \supset . a^2+b^2\ \varepsilon 10N_1 . \cup . a^2-b^2\ \varepsilon\ 10N_1$

1·93 $D(a,b)=1 . D(a+b, 3)=1 . \supset . D(a+b, a^2-ab+b^2)=1$

1·94 $a>b . D(a,b)=1 . \supset . D(a+b, a-b) = \iota 1 \cup \iota 2$

3·0 $D[a/D(a,b), b/D(a,b)]=1$

Se due numeri (N_1) si dividono pel loro massimo comun divisore, i quoti sono primi fra loro.

3·1 $a,b,c\ \varepsilon\ 2N_1+1 . \supset . D(a,b,c) = D[(a+b)/2, (a+c)/2, (b+c)/2]$

3·2 $a,b\ \varepsilon\ N_1 . \supset . D(a,b) = \text{Num}\ N_1 \frown x \ni [x\varepsilon 1\cdots b . ax\ \varepsilon N_1 \times b]$

Il massimo comun divisore di due numeri a,b ($a,b\varepsilon N_1$) è eguale al numero dei multipli di b contenuti nella serie a, $2a$, $3a$, ... ba.

3·3 $n\ \varepsilon N_1+1 . u\ \varepsilon N_1 F 1\cdots n . a\ \varepsilon N_1 \times u . r,s\ \varepsilon 1\cdots n . r -= s . \supset_{r,s}$
$D(u_r, u_s) = 1 : \supset . a\varepsilon N_1 \times \Pi u$

Se un numero (N_1) è divisibile per più altri primi fra loro a due a due, è divisibile pel loro prodotto.

§45 mlt

3·1 $n\varepsilon N_1+1 . \supset . m(1\cdots 2n) = m[(n+1)\cdots 2n]$

§50 Np

5·81 $n \varepsilon N_1 . \supset . 4^{2n+1}+1 - \varepsilon Np$

5·82 $n \varepsilon N_1+1 . \supset . n^4+4 - \varepsilon Np$

5·83 $a \varepsilon Np . a>3 . \supset . a^2 \varepsilon 24N_1+1$

5·84 $a \varepsilon Np . a>3 . \supset . a^3 \varepsilon 18N_1+1 \cup 18N_1-1$

5·85 $p \varepsilon Np - \iota 2 . q \varepsilon 1\cdots(p-1) . \supset . \Sigma[r \uparrow q | r, 1\cdots(p-1)] \varepsilon N_1 \times p$
{MATROT, Revue semestrielle a.1900, t.8, p.40}

5·86 $m \varepsilon N_0 . n \varepsilon N_1 . p \varepsilon Np - \iota 2 . q \varepsilon 1\cdots(p-1) . \supset .$
$\Sigma\{r \uparrow [m(p-1)+q] | r, 1\cdots(np-1)\} \varepsilon N_1 \times p$
{PAPPIT, Revue semestrielle a.1900, t.8, p.40}

5·92 $a \varepsilon Np . \supset . \Pi[1\cdots(a-1)] - \varepsilon N_1 \times a$

5·93 $a \varepsilon (N_1+4) - Np . \supset . \Pi[1\cdots(a-2)] \varepsilon N_1 \times a$

5·94 $a \varepsilon Np . b \varepsilon 2N_1 . a>b . \supset . \Pi[(a-b)\cdots(a-1)]/b! \varepsilon N_0 \times a+1$

5·941 $a \varepsilon Np . b \varepsilon 2N_1+1 . a>b . \supset . \Pi[(a-b)\cdots(a-1)]/b! \varepsilon N_1 \times a-1$

5·95 $a \varepsilon Np . b \varepsilon 2N_1 . a>b . \supset . \Pi[(a-b)\cdots(a-2)]/(b-1)! \varepsilon N_1 \times a-b$

5·951 $a \varepsilon Np . b \varepsilon 2N_1+1 . a>b . \supset .$
$\Pi[(a-b)\cdots(a-2)]/(b-1)! \varepsilon N_0 \times a+b$

5·96 $n \varepsilon N_1+1 . a \varepsilon Np . x \varepsilon N_1 F 1\cdots n . \Pi x \varepsilon N_1 \times a . \supset .$
$\exists\, 1\cdots n \cap r\ni(x_r \varepsilon N_1 \times a)$

Se un numero primo divide un prodotto, esso dividerà uno almeno dei fattori.

5·97 $n \varepsilon N_1+1 . a \varepsilon Np . x \varepsilon Np F 1\cdots n . \Pi x \varepsilon N_1 \times a . \supset .$
$\exists\, 1\cdots n \cap r\ni(x_r = a)$

Se un numero primo divide un prodotto di numeri primi, esso è eguale ad uno di essi.

10·6 $p \varepsilon Np . a \varepsilon N_1 - (N_1 \times p) . r,s \varepsilon 1\cdots(p-1) . r -= s . \supset .$
$\text{rest}(ra,p) -= \text{rest}(sa,p)$

Se un numero a ($a \varepsilon N_1$) non è divisibile pel numero primo p, i multipli successivi di a, fino a quello ottenuto col moltiplicatore $p-1$, divisi per p, dànno resti disuguali.

10·7 $a,b \varepsilon N_1 . a+b \varepsilon Np . \supset . D(a,b)=1$

10·71 $a,b \varepsilon N_1 . a>b . a-b \varepsilon Np . \supset . D(a,b) = 1 . \cup . a,b \varepsilon N_1 \times (a-b)$

10·72 $a,b \varepsilon Np . m,n \varepsilon N_1 . \supset . D(a^m+b^n,a) = D(a^m+b^n,b) = 1$

10·73 $a,b \varepsilon Np . m,n \varepsilon N_1 . a^m>b^n . \supset . D(a^m-b^n,a) = D(a^m-b^n,b) = 1$

§ 67. β

$a,b,m,n \,\varepsilon\, N_1 \,.\supset:$

3·0 $X^n, X^n\beta X^{-n}a \,\varepsilon\, N_0 \times b \,.\supset.\, a \,\varepsilon\, N_1 \times b$

3·1 $m\times X^n-1, EX^{-n}a+(X^n\beta X^{-n}a)\times m \,\varepsilon\, N_0\times b \,.\supset.\, a\varepsilon\, N_1\times b$

3·2 $m\times X^n+1, EX^{-n}a-$ » » » » $.\supset.$ » »

3·0 Un numero intero (N_1) è divisibile pel numero intero b ($b\varepsilon N_1$) se b divide 10^n ($n\varepsilon N_1$) e dividc anche il numero formato dalle ultime n cifre a destra del numero dato. Sia $n=1$; i divisori di 10 sono 2, 5, 10, e si ha il noto carattere di divisibilità per 2, 5, 10, cioè: *Un numero è divisibile per 2; 5, 10, se la cifra delle unità è divisibile per 2, 5, 10.* (Se la cifra delle unità é *zero*, il numero è divisibile per 2, 5, 10, perchè $n\varepsilon N_1 \,.\supset.\, 0\varepsilon N_0\times n$).

Sia $n=2$; i divisori di 100 sono 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100; e si ha: *Un numero è divisibile per 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 se il numero formato dalle ultime due cifre a destra è divisibile per 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.* (Se le ultime due cifre a destra sono due zeri, il numero è divisibile per ciascuno dei numeri sopra considerati). E così di seguito.

Questa proposizione si sarebbe anche potuta scrivere assai semplicemente così:

$$a,b,n \,\varepsilon\, N_1 \,.\, 10^n, \mathrm{rest}\,(a,10^n) \,\varepsilon\, N_0\times b \,.\supset.\, a\varepsilon\, N_1\times b$$

3·1 Un numero intero (N_1) è divisibile pel numero intero b ($b\varepsilon N_1$), se b divide $m\times 10^n - 1$ ($m,n\varepsilon N_1$), e se separando n cifre alla destra del numero date, la somma del numero di sinistra e di m volte il numero di destra è divisibile per b.

Sia p. e. $m=9, n=2$, sarà $m\times 10^n - 1 = 899 = 29\times 31$; e quindi avremo le due proposizioni:

$$a\varepsilon\, N_0 \,.\, b\varepsilon\, (0\cdots 99) \,.\, a+9b \,\varepsilon\, 29N_1 \,.\supset.\, 100a+b \,\varepsilon\, 29N_1$$

$$\text{» » } .\, a+9b \,\varepsilon\, 31N_1 \,.\supset.\, 100a+b \,\varepsilon\, 31N_1$$

Ossia: *Un numero* (N_1) *è divisibile per 29 o per 31 se la somma del numero delle centinaia, è di nove volte il numero formato dalle sue due ultime cifre a destra è divisibile per 29 o per 31.*

Sia p. e. $m=4, n=3$, sarà $m\times 10^n - 1 = 3999 = 3\times 31\times 43$; e quindi avremo le due proposizioni:

$$a\varepsilon\, N_0 \,.\, b\varepsilon\, (0\cdots 999) \,.\, a+4b \,\varepsilon\, 31N_1 \,.\supset.\, 1000a+b \,\varepsilon\, 31N_1$$

$$\text{» » } .\, a+4b \,\varepsilon\, 43N_1 \,.\supset.\, 1000a+b \,\varepsilon\, 43N_1$$

Ossia: *Un numero* (N_1) *è divisibile per 31 o per 43 se la somma del numero delle migliaia e di quattro volte il numero formato dalle sue tre ultime cifre a destra è divisibile per 31 o per 43.* E così di seguito.

Questa proposizione si potrebbe anche scrivere assai semplicemente così:

$$a,b,m,n\varepsilon\, N_1 \,.\, m\times 10^n-1, \mathrm{quot}(a,10^n)+[\mathrm{rest}(a,10^n)]\times m \,\varepsilon\, N_0\times b.$$
$$.\supset.\, a \,\varepsilon\, N_1\times b$$

3·2 Un numero intero (N_1) è divisibile pel numero intero b ($b \varepsilon N_1$) se b divide $m \times 10^n + 1$ ($m, n, \varepsilon N_1$), e se separando n cifre alla destra del numero dato, la differenza fra il numero di sinistra, ed m volte il numero di destra è divisibile per b.

Sia p. e. $m=9$, $n=2$, sarà $m \times 10^n + 1 = 901 = 17 \times 53$; e quindi avremo le due proposizioni:

$$a \varepsilon N_0 . b \varepsilon (0 \cdots 99) . a-9b \varepsilon 17N_1 .\supset. 100a+b \varepsilon 17N_1$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad . a-9b \varepsilon 53N_1 .\supset. 100a+b \varepsilon 53N_1$$

Ossia: *Un numero (N_1) è divisibile per 17 o per 53 se la differenza fra il numero delle centinaia e nove volte il numero formato dalle sue ultime due cifre a destra è divisibile per 17 o per 53.*

Sia p. e. $m=2$, $n=3$, sarà $m \times 10^n + 1 = 2001 = 3 \times 23 \times 29$; e quindi avremo le due proposizioni:

$$a \varepsilon N_0 . b \varepsilon (0 \cdots 999) . a-2b \varepsilon 23N_1 .\supset. 1000a+b \varepsilon 23N_1$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad . a-2b \varepsilon 29N_1 .\supset. 1000a+b \varepsilon 29N_1$$

Ossia: *Un numero (N_1) è divisibile per 23 o per 29 se la differenza fra il numero delle migliaia ed il doppio del numero formato dalle sue ultime tre cifre a destra è divisibile per 23 o per 29.* E così di seguito.

Questa proposizione si potrebbe anche scrivere assai semplicemente così:

$$a,b,m,n \varepsilon N_1 . m \times 10^n + 1 . \text{quot}(a, 10^n) - [\text{rest}(a, 10^n)] \times m \varepsilon N_0 \times b . .\supset. a \varepsilon N_1 \times b$$

§68 Nprf

$N_0 \; N_1 \; + \; - \; \times \; / \; \upharpoonright \; > \; \cdots \; \Sigma$ min Np Nprf

·0 $\text{Nprf} = N_1 \frown x \ni \{ x = \Sigma N_1 \frown [x/(N_1+1)] \}$ = Numero perfetto Df

·1 $\text{Min Nprf} = 6$

·2 $m \varepsilon N_1 .\supset. -\exists \text{Np}^m \frown \text{Nprf}$

·3 $m \varepsilon N_1 + 1 . 2^m - 1 \varepsilon \text{Np} .\supset. 2^{m-1}(2^m - 1) \varepsilon \text{Nprf}$ { EUCLIDES IX, P36 }

·4 $m \varepsilon \iota 2 \cup \iota 3 \cup \iota 5 \cup \iota 7 \cup \iota 13 \cup \iota 17 \cup \iota 19 \cup \iota 31 \cup \iota 61 .\supset. 2^{m-1}(2^m - 1) \varepsilon \text{Nprf}$

·5 $a \varepsilon \text{Nprf} \frown 2N_1 .\supset. \exists N_1 \frown m \ni [a = 2^{m-1}(2^m - 1)]$ { EULER }

·51 $\text{Nprf} \frown 2N_1 .\supset. 10N_0 + 6 \cup 100N_0 + 28$

·52 $\text{Nprf} \frown 2N_1 - \iota 6 .\supset. 9N_1 + 1$

·53 $\text{Nprf} \frown 2N_1 - \iota 28 .\supset. (7N_1 + 1) \cup (7N_1 - 1)$

·54 $\text{Nprf} \frown (10N_1 + 6) .\supset. 45N_1 + 1$

·55 $\text{Nprf} \frown (10N_1 + 8) .\supset. 30N_1 - 2$

·56 $a \varepsilon \text{Nprf} \frown (10N_1 + 8) .\supset. \text{EX}^{-1} a \varepsilon 9N_0$

·57 $\text{Nprf} \frown (496 + 2N_1) .\supset. (100N_1 + 16) \cup (100N_1 + 28) \cup (100N_1 + 36) \cup (100N_1 + 56) \cup (100N_1 + 76)$

·6 $a \varepsilon \text{Nprf} .\supset. \Sigma / [N_1 \frown (a / N_1)] = 2$

Note.

·0 Questa proposizione dà la definizione di *numero perfetto;* cioè « *dicesi perfetto* (τέλειος) *un numero quando eguaglia la somma dei suoi divisori, l'unità compresa, ed esso eccettuato* ».

·2 Un numero perfetto non è mai eguale ad una potenza d'un numero primo.

·3 Tutti i numeri contenuti nella formola $2^{m-1}(2^m-1)$, in cui m è un numero intero maggiore dell'unità, e 2^m-1 è un numero primo, sono numeri perfetti.

·4 Tutti i numeri perfetti che si conoscono sono contenuti nella formola $2^{m-1}(2^m-1)$, e corrispondono ai valori 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61 di m. Essi sono: 6, 28, 496, 8 128, 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328, 2 305 843 008 139 952 128, 2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176.

I sigg. I. Fitz Patrik e G. Chevrel nei loro *Exercices d'Arithmétique* — Paris, Hermann 1893, pag. 363 — dicono che è perfetto anche il numero 144 115 187 807 420 416, il quale corrisponde al valore $n=29$, e ciò contrariamente a quanto afferma Dupuis nelle sue tavole logaritmiche.

Per trovare altri numeri perfetti contenuti in questa formola, basta cercare altri valori di m pei quali 2^m-1 sia un numero primo. Questa ricerca viene grandemente semplificata dalla prop. $m\varepsilon N_1 . 2^m-1\varepsilon Np .\supset. m\varepsilon Np$ che è la P5·7 del § 50Np di F_2N3; basta infatti limitarsi a dare ad m i valori dei numeri primi. Sono già stati sperimentati i valori dei numeri primi non superiori a 61. Ma, anche così semplificata, questa ricerca è straordinariamente laboriosa.

Mersenne nell'opera *Cogitata physico-mathematica* asserisce che sono perfetti i numeri corrispondenti ai valori 67, 127, 257 di m; ciò però non è ben certo.

La formola che dà i numeri perfetti che conosciamo, si suole anche scrivere così: $2^n(2^{n+1}-1)$. Noi preferiamo l'altra, perchè più facile a ritenersi a memoria. Evidentemente si passa da una all'altra ponendo $n=m-1$. I numeri perfetti dati da questa formola sono tutti pari; e la P·5 dice che i numeri perfetti pari sono tutti contenuti in questa formola.

Non si conosce alcun numero perfetto dispari.

·51 Ogni numero perfetto pari termina per 6 o per 28.

·52 Ogni numero perfetto pari, tranne il 6, è un multiplo di 9 più 1.

·53 Ogni numero perfetto pari, tranne il 28, è un multiplo di 7 più o meno 1.

·54 Ogni numero perfetto, maggiore di 6, che termini per 6, è un multiplo di 45 più 1.

·55 Ogni numero perfetto, maggiore dl 8, che termini per 8, è un multiplo di 30 meno 2.

·56 Se un numero perfetto termina per 8, il numero delle sue centinaia è divisibile per 9.

·57 Ogni numero perfetto pari, maggiore di 496. termina per 16, o per 28, o per 36, o per 56, o per 76.

·6 La somma degli inversi dei divisori d'un numero perfetto, è eguale 2.

§ 75. Chf

1·0 $\text{Chf}\, N_1^2 = \iota 0 \cup \iota 1 \cup \iota 4 \cup \iota 5 \cup \iota 6 \cup \iota 9$

1·1 $\text{Chf}\, N_1^4 = \iota 0 \cup \iota 1 \cup \iota 5 \cup \iota 6$

1·2 $\text{Chf}\, N_1^5 = 0 \cdots 9$

1·3 $\text{Chf}\, N_1 \upharpoonright (2N_1+1) = 0 \cdots 9$

1·4 $n \varepsilon N_1 \,.\supset.\, \text{Chf}\, N_1^{n+4} = \text{Chf}\, N_1^n$

$m \varepsilon N_1 \,.\supset:$

2·0 $\text{Chf}\, m^2 = 6 \,.\supset.\, \text{Chf}\, X^{-1} m^2 \,\varepsilon\, 2N_0+1$

2·1 $\text{»} \;\; -= 6 \,.\supset.\; \text{»} \;\; \text{»} \;\; \varepsilon\, 2N_0$

2·2 $\text{Chf}\, X^{-1} 7^m \,\varepsilon\, (\iota 0 \cup \iota 4)$ {GELIN l. c. P2677}

2·3 $m \varepsilon 4N_1 \,.=.\, \text{Chf}\, m \,\varepsilon\, 4N_0 \,.\, \text{Chf}\, X^{-1} m \,\varepsilon\, 2N_0 \,.\cup.$
$\text{Chf}\, m \,\varepsilon\, 2(2N_0+1) \,.\, \text{Chf}\, X^{-1} m \,\varepsilon\, 2N_0+1$
{GELIN l. c. P2490}

2·4 $m \varepsilon 8N_1 \,.=.\, \text{Chf}\, X^{-2} m \,\varepsilon\, 2N_0 \,.\, X^2 \beta X^{-2} m \,\varepsilon\, 8N_0 \,.\cup.$
$\text{Chf}\, X^{-2} m \varepsilon\, 2N_0+1 \,.\, X^2 \beta X^{-2} m \,\varepsilon\, (4N_0) - (8N_0)$
{GELIN l. c. P2491}

Note.

2·0-1 La cifra delle decine di un quadrato (N_1^2) è dispari se il quadrato termina per 6; è pari se il quadrato non termina per 6.

2·2 La cifra delle decine d'una potenza intera positiva di 7 è o 0 o 4.

2·3 Un numero intero (N_1) è divisibile per 4 quando la cifra delle unità è zero, o divisibile per 4, e la cifra delle decine è pari; oppure quando la cifra delle unità è divisibile per 2 e non per 4, e la cifra delle decine è dispari.

2·4 Un numero intero (N_1) è divisibile per 8 quando la cifra delle centinaia è pari, ed il numero formato dalle ultime due cifre a destra è o zero, o divisibile per 8; oppure quando la cifra delle centinaia è dispari, ed il numero formato dalle ultime due cifre a destra è divisibile per 4 senza essere divisibile per 8.

* * *

Le proposizioni precedenti sono tolte in gran parte dal « *Recueil de Problèmes d'Arithmétique par l'Abbé E. Gelin prof. au Collège Saint-Quirin a Huy (Belge) — 1896 — Collège Saint-Quirin Editeur* » Questo *Recueil* contiene 3113 problemi [1] classificati come l'indica la *Table des Matières* che trascrivo integralmeute:

[1] Questi problemi sono in correlazione col « *Traité d'Arithmétique Élémentaire, del medesimo autore — Huy — Collège Saint Quirin, 1897* » opera nella quale ciascun Insegnante delle nostre scuole secondarie troverà molte cose utili all'insegnamento.

Nombres entiers. — Propriétés des nombres entiers. — Fractions ordinaires. — Nombres décimaux. — Mesures de longueur. — Mesures de surface. — Mesures agraires. — Mesures de volume. — Mesures pour le bois de chauffage. — Mesures de capacité. — Poids. — Poids spécifiques. — Monnaies. — Nombres complexes. — Puissances et racines. — Rapports et proportions. — Règle de trois. — Règle conjointe. — Partages proportionels. — Mélanges et alliages. — Du titre des matières d'or et d'argent. — Questions pour cents. — Intérêt simple. — Caisse d'épargne. — Escompte. — Rentes sur l'État. — Actions et obligations. — Change et arbitrages. - Problèmes du second degré. — Progressions. — Logarithmes. — Intérêt composé. — Annuités. — Questions d'arithmologie. — Polygones. — Cercle. — Polyèdres. — Cylindre. — Cône. — Sphère. — Formules arithmétiques. — Formules pour la mesure des surfaces et des volumes. — Table de nombres usuels.

Alcuni di questi problemi sono semplici esercizi di operazioni da eseguirsi; però l'Autore ha saputo dar loro un carattere di novità, e presentarli in modo da destare la curiosità e l'interesse dell'alunno.

Altri sono problemi numerici, varii, curiosi, interessanti, e quasi tutti riferentisi a questioni di vita pratica e di pratica utilità. Ciascuno di essi è seguito dalla risposta; e sono contradistinti con un asterisco quelli che si possono facilmente risolvere sia per mezzo dell'Algebra, sia col solo sussidio dell'Aritmetica.

Altri infine sono teoremi da dimostrare; e sono quasi tutti radunati nel capitolo « *Questions d'Arithmologie* », in numero di 450. La maggior parte di essi, o sono teoremi interamente nuovi, dovuti all'Autore, oppure sono di quelli che difficilmente si riscontrano nei libri scolastici. Molti di questi teoremi sono seguiti dal nome di chi pel primo li enunciò. Sarebbe desiderabile che in una ventura edizione, che auguriamo prossima, accanto al nome degli autori fosse indicata l'opera e l'anno, come si suole fare nel « *Formulaire de Mathématiques* ». Credo che l'egregio e dotto Prof. Gelin farebbe cosa gradita agli studiosi se a ciascun teorema facesse seguire un breve cenno sulla via da seguire nella dimostrazione.

I sigg. Professori troveranno in questo libro del Gelin una raccolta abbondantissima di quesiti d'Aritmetica classificati in modo che in breve tempo, e con tutta facilità, potranno scegliere per la scuola esercizi adattati all'intelligenza dei proprii alunni, esercizi curiosi, ed interessanti sì da rendere ameno lo studio, per se un po' arido, dell'Aritmetica.

Torino, Gennaio 1900. MARCO NASSÒ.

ALCUNE FORMULE DI LOGICA

$a,b,c,d,e,f \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \;.\supset\therefore$

1 $a\supset c \,.\supset:\, a\supset b \,.=.\, ac\supset b$ 5 $c\supset a \,.\supset:\, b\supset a \,.=.\, b\supset a\cup c$

2 » $a\supset b \,.=.\, ac\supset bc$ 6 » $b\supset a \,.=.\, b\cup c\supset a\cup c$

3 » $a\supset b \,.=.\, a\supset bc$ 7 » $b\supset a \,.=.\, b\cup c\supset a$

4 $a\supset b \,.\supset:\, a\supset b\cup c$

8 $ab\supset ef \,.\supset.\, abe\supset f$ 8' $ab\supset ef \,.\, b\supset a \,.\supset.\, b\supset aef$

9 $e\cup f\supset a\cup b \,.\supset.\, f\supset a\cup b\cup e$ 9' $e\cup f\supset a\cup b \,.\, a\supset b \,.\supset.\, a\cup e\cup f\supset b$

10 $a\supset b \,.=:\, ac\supset b \,.\, a\supset b\cup c$ 10' $a\supset b \,.=:\, ac\supset bc \,.\, a\cup c\supset b\cup c$

10'' $a=b \,.=:\, ac=bc \,.\, a\cup c=b\cup c$

11 $ab=a\cup b \,.=.\, a=b$ 12 $a\supset b\cup -b$

13 $a=(a\cup b)(a\cup -b)$ 14 $(a\cup b)(-a\cup -b)=a-b\cup b-a$

15 $a\cup b=ab\cup a-b\cup b-a$

16 $a\supset b\cup c \,.\, -\exists\, bc \,:\supset:\, ab=a-c \,.\, ac=a-b$

17 $ab=a-c \,.\, b\supset a \,:\supset:\, a\supset b\cup c \,.\, -\exists\, abc$

18 $a\supset b\cup c \,.\, -\exists\, ab-c \,:=:\, a\supset c$ 19 $ab\supset c \,.\, a-b\supset c \,:=:\, a\supset c$

20 $a\supset b\cup c \,.\, -\exists\, ab-c \,.\, -\exists\, ac-b \,:=:\, a\supset c \,.\, a\supset b$

21 » .(» $\cup$ ») $:=:$ » $\cup$ »

22 $a\cup b\supset c\cup d \,.\, a=c \,.\, -\exists\, ab \,:\supset.\, b\supset d$

22' » = » . » . » $:\supset.$ »

22'' » . » . $-\exists\, cd \,:\supset.\, d\supset b$

23 $a\cup b\supset c\cup d \,.\, a=c \,.\, -\exists\, a-d \,:\supset.\, b\supset d$

24 $a=b\cup c\cup d \,.\, -\exists\, bc \,.\, -\exists\, bd \,:\supset:\, a-b=c\cup d \,.\, a-(c\cup d)=b$

24' » . » . » . $-\exists\, cd \,:\supset:$

$a-b=c\cup d \,.\, a-c=b\cup d \,.\, a-d=b\cup c \,.\, a-b-c=d \,.$

$a-c-d=b \,.\, a-b-d=c$

25 $a=bc \,.\, -\exists(-b)(-c) \,:\supset:\, a\cup(-b)=c \,.\, a\cup(-c)=b$

25' $a=bcd \,.\, -\exists -b-c \,.\, -\exists -b-d \,:\supset:\, a\cup -b=cd \,.\, a\cup -(cd)=b$

25'' » . » » . $-\exists -c-d \,:\supset:$

$a\cup -b=cd \,.\, a\cup -c=bd \,.\, a\cup -d=bc \,.\, a\cup -b\cup -c=d$

$a\cup -c\cup -d=b \,.\, a\cup -b\cup -d=c$

Note.

P 1 La $\supset$: comprende la F_2I—32 e la sua inversa la quale ha solamente luogo quando il *fattore* che si vuol togliere dalla *Hp contiene il fattore* che rimane nella stessa.

» 2 La $\supset$: comprende la F_2I—33 e la sua inversa la quale ha solamente luogo quando il *fattore* comune che si vuol togliere dalla *Hp* e dalla *Ths contiene* il *fattore* che rimane nella *Hp*.

» 3 Non è altro che l'applicazione del principio export alla F_2I—53; così si può introdurre un *fattore* nella *Ths* solo quando questo *fattore* che si vuol introdurre *contenga* la *Hp*.

P 5 La $\supset$: comprende la p4 e la sua inversa la quale ha solamente luogo quando l'*addendo* che si vuol togliere dalla *Ths* è *contenuto* nel *addendo* che rimane nella stessa.

» 6 La $\supset$: comprende la F_2I—208 e la sua inversa la quale ha solamente luogo quando l'*addendo* comune che si vuol togliere dalla *Ths* e dalla *Hp* è *contenuto* nel *addendo* che rimane nella *Ths*.

» 7 Non è altro che l'applicazione del principio export alla F_2I—213; così si può introdurre un *addendo* nella *Hp* solo quando questo *addendo* che si vuol introdurre è *contenuto* nella *Ths*.

P 4 In linguaggio ordinario come la F_2I—32 si legge « ad una *Hp* si può sempre unire un *fattore* qualunque » così la p4 si legge « ad una *Ths* si può sempre unire un *addendo* qualunque.

» 8;8' Un *fattore* si può sempre trasportare dalla *Ths* alla *Hp* (s'intende mantenendo il segno e il nome di *fattore*) ma l'inverso si fa solamente quando il *fattore* che si trasporta nella *Ths contenga* la *Hp* rimanente.

» 9;9' Un *addendo* si può sempre trasportare dalla *Hp* alla *Ths* (s'intende mantenendo il segno e il nome di *addendo*) ma l'inverso si fa solamente quando l'*addendo* che si trasporta nella *Hp* sia *contenuto* nella *Ths* rimanente.

NB. — La regola determinata dalla coppia (P8;P8') serve per la formazione di teoremi inversi nel senso indicato in « El. di Geometria Sannia e D'Ovidio pag. 27 4a edizione n. 21 ».

La regola determinata dalla coppia (P9;P9') si potrebbe chiamare duale della precedente.

P 10 Comprende le F_2I—32, p4, F_2I—230
» 10' » » F_2I—33, F_2I—208, F_2I—223
» 10'' » » F_2I—50; F_2I—210, F_2I—224

» 11 Differisce dalla F_2I—225 per la scambio di $\supset$ in $=$; comprende tutta la F_2I—225 di più contiene le due forme « ab$\supset$a$\supset$a$\cup$b, e Syll. ».

» 18 Si può intendere come un caso più generale della F_2I—344; da quest'ultima si passa alla p. 18 sostituendo alla condizione « $-\exists$ab » la condizione « $-\exists$ab$-$c » la quale è sempre vera tutte le volte che è vera la precedente, ma non inversamente. Per questo fatto si ha lo scambio fra i segni .$\supset$. ; .$=$.

» 19 Comprende in sè la F_2I-120 ossia la F_2III §4 P2·4. Osservando poi le equivalenze indicate dalle F_2I-413 e F_2I-254 si vede che la p19 non è

altro che la p18 nella quale alle forme della 1a parte si sono sostituite forme equivalenti.

» 20 ; 21 Sono conseguenze dirette della p18. Si potrebbe a queste dare le forme della p19.

» 22';22'' Derivano dalla p22. La loro coesistenza genera la F_2I–345 ossia F_2III §5 P5·5.

» 24;24' Sono generalizzazioni della F_2I–352.

» 25';25'' Sono generalizzazioni della p25.

NB. — Le F_2I–352 ; 24 ; 24' e le 25 ; 25' ; 25'' costituiscono la regola per trasportare una classe da un membro all'altro di una eguaglianza, nei casi possibili.

Varallo, Dicembre 1899.

PIETRO BUFFA.

ALCUNE IDENTITÀ

Il prof. Ferrari Francesco pubblica nel supplemento al Periodico di Matematica, anno III, fasc. I, interessanti identità fra tre numeri a, b, c. Alcune di queste formule, cioè le 1, 25, 34, 39 del Ferrari si trovano nel Formulario. Delle altre mi parrebbe conveniente di introdurre nel Formulario le seguenti, analoghe ad altre in esso già contenute.

§↑ P14:

$$(a+2b)(b+c-a)+(b+2c)(a-b+c)+(c+2a)(a+b-c)=(a+b+c)^2$$

$$(a+b)(b+c)(c-a)+(b+c)(c+a)(a-b)+(c+a)(a+b)(b-c)= (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(a-b)^2(a+b-2c)+(b-c)^2(b+c-2a)+(c-a)^2(c+a-2b)= 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(a-b)(b+c-a)(a-b+c)+ (b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(a+b-c)(b+c-a)=4(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$a(b+c)(b+c-a)+b(c+a)(c+a-b)+c(a+b)(a+b-c)=6abc$$

$$a(b-c)(b+c-a)+b(c-a)(c+a-b)+c(a-b)(a+b-c)= 2(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(a+b)^2(a-b)+(b+c)^2(b-c)+(c+a)^2(c-a)=-(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)c-a)^2= 2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)=-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$ab(a+b)^2+bc(b+c)^2+ca(c+a)^2=(a+b+c)[(a+b)(b+c)(c+a)-4abc]$$

$$a(b-c)(b+c-a)^2+b(c-a)(c+a-b)^2+c(a-b)(a+b-c)^2=0$$

$$(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5= 5(a-b)(b-c)(c-a)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

F. CASTELLANO

Additions au Formulaire
par G. VACCA

§r P11·0 { C. H. PRIOR a.1878; Cfr. Mm. a.1881 t.10 p.33 }
{ cont. §Π P8·1 }

§↑

6·1 $2\uparrow(2\uparrow5)+1 \ \varepsilon\ N_1\times[2^7(2^2+1)+1]$ {EULER PetrC. a.1732 t.6 p.104}
$2\uparrow(2\uparrow6)+1 \ \varepsilon\ N_1\times[2^8(2^{10}+2^5+2^4-1)+1]$ { LANDRY }
$2\uparrow(2\uparrow12)+1 \ \varepsilon\ N_1\times[2^{14}(2^8-1)+1]$ { PERVOUCHINE PetrB. a.1878 }
$2\uparrow(2\uparrow23)+1 \ \varepsilon\ N_1\times[2^{25}(2^2+1)+1]$ { » » }
$2\uparrow(2\uparrow36)+1 \ \varepsilon\ N_1\times[2^{39}(2^2+1)+1]$ { SEELHOFF Zm. a.1886 t.31 p.173}
14·13 { GERGONNE Ann. de Math. a.1816-17 t.7 p.163 }

P15.

·91 $n\varepsilon\, 6N_1-1 \,.\, a,b\varepsilon N_1 \,.\supset.$
$(a+b)^n-a^n-b^n \ \varepsilon\ nab(a+b)(a^2+ab+b^2)\times N_1$

·92 $n\varepsilon\, 6N_1+1 \,.\, a,b\varepsilon N_1 \,.\supset.$
$(a+b)^n-a^n-b^n \ \varepsilon\ nab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2\times N_1$
{ CAUCHY a.1839, Œuvres s.1 t.4 p.501; *Ex.* a.1841 t.2 p.137 }

§> P7·5 { PAPPUS VII P8 p.691 }

§··· ✱ 2.

·1 $a\varepsilon N_1 \,.\supset.\ \exists N_1 \frown x \ni [x+0\cdots a \supset N_1 - N_1\uparrow(1+N_1)]$

§Num

·9 $\mathrm{Num}(\mathrm{Cls}'N_0) = \mathrm{Num}(N_0 F N_0)$

·91 $\mathrm{Num}[(N_0 F\, 0\cdots n)|n\ 'N_0] = \mathrm{Num}\, N_0$

§Σ P1·73 $\Sigma\Lambda=0$

✱ 14·1 $n\varepsilon N_1 \,.\supset.\ \Sigma[\,/,(n+1)\cdots 2n] = \Sigma[(-1)^r/r\ |r, 1\cdots 2n]$
{ CATALAN JdM. a.1875 s.3 t.1 p.240 }

§Π 1·73 $\Pi\Lambda=1$

P6.

·2 $n\varepsilon\, N_1+1 \,.\, a\varepsilon\, (rF1\cdots n)\mathrm{Sim} \,.\, b=\{\Pi[a_r-a,(1\cdots n)-\iota r]\ |r, 1\cdots n\} \,.\supset:$
$s\varepsilon\, 0\cdots(n-2) \,.\supset_s.\ \Sigma a^s/b = 0 : \Sigma a^{n-1}/b = 1$
{ EULER a.1762 CorrM. t.1 p.659 ; *PetrNC.* a.1775 t.20 p.78 }

·21 Hp P·2 $.\supset.\ \Sigma a^n/b = \Sigma a \,.\, \Sigma a^{-1}/b = (-1)^n/\Pi a \,.$
$\Sigma a^{-2}/b = (-1)^n \Sigma(/a)/\Pi a$ { GAUSS t.3 p.266 }

✱ 8·1 $n\varepsilon\, 3+N_0 \,.\, a\varepsilon\, (\mathrm{rF}1\cdots n)\mathrm{Sim} : r\varepsilon\, 1\cdots(n-2) \,.\supset_r.\, \Sigma a^r=0 :\supset.$
$\Sigma\{(-1)^x a_x/\Pi[(a_r-a_s)\,|(r,s),\, 1\cdots n \,!\, 1\cdots n \frown (r,s)\ni(r,s-\varepsilon\iota x \,.\, r<s)]\,|x,1\cdots n\}$
$\times\Sigma\{(-1)^x(/a_x)\times\Pi[$ » » » »] » $\}=n^2$
{ Mac Mahon Mm. a.1884 t.13 p.144 }

§! P1.

·5 $n\varepsilon N_1 \,.\supset.\, \Sigma\{n!n\,|n,\, 1\cdots n\} = (n+1)!-1$

·6 —— $.\supset.\, \Sigma\{n/(n+1)!\,|n,\, 1\cdots n\} = /(n+1)!$

§! 3·1 n

{ Gergonne Ann. de Math. a.1816-17 t.7 p.165 }

§Dvr P2

$u,v\varepsilon\, \mathrm{Cls'R} \,.\, \exists u \,.\, \exists v \,.\, a\varepsilon R \,.\, n\varepsilon N_1 \,.\supset.$ ·2 =P1·34 ·3 $(Du)^n = D(u^n)$

·4 $D[a\uparrow(0\cdots n)] = [D(1,a)]^n$ { Barrieu NAnn. a.1895 t.14 p.214 }

§mlt P2

$u,v\varepsilon\, \mathrm{Cls'R} \,.\, \mathrm{Num}\,u,\, \mathrm{Num}\,v\, \varepsilon N_1 \,.\, a\varepsilon R \,.\, n\varepsilon N_1 \,.\supset.$

·82-84 = (m|D) §Dvr P2·2-·4 { Barrieu NAnn. a.1895 t.14 p.214 }

§Cmb P3. $m,x\varepsilon\, N_1 \,.\supset.$

·21 $\Sigma\{C(m,r)\times\Sigma(1\cdots x)^r\,|r,\, 0\cdots m\} = \Sigma[2\cdots(x+1)]^m$

[$\Sigma\{$ » » » $\} = \Sigma\{\Sigma[C(m,r)y^r\,|r,0\cdots m]\,|y,\, 1\cdots x\} =$
$\Sigma\{(1+y)^m\,|y,1\cdots x\} = \Sigma\,[2\cdots(x+1)]^m$]

·22 $(m+1)\Sigma(1\cdots x)^m =$
$(x+1)^{m+1}-1-\Sigma\{C(m+1,r)\times\Sigma(1\cdots x)^r\,|r,\, 0\cdots(m-1)\}$

[$(m+1)\,|m$ P·21 $.\supset.$
$\Sigma\{C(m+1,r)\times\Sigma(1\cdots x)^r\,|r,0\cdots(m+1)\} = \Sigma[1\cdots(x+1)^{m+1}]-1 \,.\supset.$
$\Sigma\{$ » » $,0\cdots m\} = (x+1)^{m+1}-1 \,.\supset.$
$\Sigma\{$ » » $,0\cdots(m-1)\} = (x+1)^{m+1}-1-(m+1)\Sigma(1\cdots x)^m\} \,.\supset.$ P]

{ ·21-22 Pascal a.1655 t.3 p.301 }

§Cmb P3 au lieu de la P·5 lisez:

·5 $n\varepsilon N_1 \,.\supset.\, \Sigma\{(-1)^r[C(2n,r)]^3\,|r,\, 0\cdots 2n\} = (-1)^n(3n)!/(n!)^3$
$= (-1)^n C(3n,n)\times C(2n,n)$

{ Dixon London Mm. a.1890 t.20 p.79 }

·51 $a,n\varepsilon\, N_1 \,.\supset.\, \Sigma\{[C(n,r)]^{2a}|r,\, 0\cdots n\}\ \varepsilon\ (n+1)\times N_1$

{ Vivanti Zm. a.1888 t.33 p.358 }

·6 $(1+x+x^2)^m = \Sigma\{(x^{m-r}+x^{m+r})\times\Sigma[C(m,\, r+2s)\times C(r+2s,\, s)\,|s,$
$0\cdots m]\,|r,\, 1\cdots m\} + x^m\times\Sigma\{C(m,\, 2s)\times C(2s,\, s)\,|s,\, 0\cdots m\}$

{ Euler a.1778. *PetrNA.* a.1794 t.12 p.47 }

§Cmb P4.

·4 $n \varepsilon N_1 .\supset. n! = \Sigma\{(-1)^r C(n,r)(n-r)^n \mid r, 0 \cdots n\}$

{ EULER *Opera postuma* a. 1862 t.1 p.32 }

·5 $n \varepsilon N_1 .\supset. \Sigma/(1 \cdots n) = \Sigma[(-1)^{r+1} C(n,r)/r \mid r, 1 \cdots n]$

{ IdM. a.1900 p.121 }

§Np P1·3 $2(N_1+1) \supset Np+Np$

{ GOLDBACH a.1742 *CorrM.* t.2 p.135 ; Dem? }

§Np P4.

·6 $n \varepsilon N_1 .\supset. (2\uparrow)^n 1 + 1 \; \varepsilon \; Np$

{ GERGONNE a.1828 Ann. de Math. t.19 p.256; Dem? }

·7 $7 \times 2^{50} + 1 \; \varepsilon \; Np$ { SEELHOFF Zm. a.1886 t.31 p.380 }

§Np P9.

·2 Num $Np \frown (4N_1+3) \; \varepsilon$ infn

·3 Num $Np \frown (4N_1+1) \; \varepsilon$ infn { cont P10·4 }

·4 Num $\{Np \frown [2\uparrow(2\uparrow N_1)+1]\} \; \varepsilon$ infn

{ EISENSTEIN a.1843 JfM t.27 p.87; Dem? }

§mp

Il convient de généraliser la Df 1·0 en substituant à l'Hp de la P1: $a,b \; \varepsilon \; N_1+1$, la suivante :

✱ 1. $a \varepsilon N_1 \,.\, b \varepsilon N_1+1 .\supset.$

. On a alors :

·11 $\text{mp}(b,1) = 0$

On peut aussi donner des Df qui ne contiennent pas le symbole « max » :

·12 $\text{mp}(b,a) = \imath N_0 \frown x \ni [a \varepsilon (b^x \times N_1) - (b^{x+1} \times N_1)]$ Df ?

·13 ———————— $[0 \cdots x = N_0 \frown y \ni (a \varepsilon \, b^y \times N_1)]$ Df ?

On peut aussi ajouter :

·41 $a \varepsilon \, Np \,.\, b,c \varepsilon N_1 .\supset. \text{mp}(a, bc) = \text{mp}(a,b) + \text{mp}(a,c)$

2·5 { WALLIS a.1658 t.2 p.814 :

« Si duorum pluriumve numerorum primorum potestates quaelibet invicem ducantur, factus partibus suis aliquotis auctus, aequatur facto ex componentibus partium suarum aliquotarum additione auctis ». }

§nt P0.

·91 $a \varepsilon R .\supset. \text{nt}a = /\text{Dvr}(1,/a) \,.\, \text{dt}a = /\text{Dvr}(1,a)$ Df ?

·92 ———— $= /\,\text{mlt}(1, a)$ ——— $= /\,\text{mlt}(1,/a)$ Df ?

✱ 6.

·1 $a \varepsilon \mathrm{R} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N}_1 + 1 \,.\supset.\, \mathrm{mp}(b,a) = \mathrm{mp}(b, \mathrm{nt}a) - \mathrm{mp}(b, \mathrm{dt}a)$ Df

C'est-à-dire : mp(b,a) est la plus grande puissance de b qui divise le numérateur réduit de a, ou la plus grande puissance, changée de signe, qui en divise le dénominateur réduit. Un de ces deux nombres est toujours nul car on a (§nt P0·11) : Dvr(nt$a$, dt$a$) = 1. Cette Df comprend celle donnée pour le cas où $a \varepsilon \mathrm{N}_1$. Alors on a dt$a = 1$, il s'ensuit que mp$(b,dta) = 0$, en tenant compte de la modification introduite au §mp.

·2 $a \varepsilon \mathrm{N}_1 + 1 \,.\, b \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset.$ §mpP1·5

·3 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\!\cdot\, a \varepsilon \mathrm{R}^m \,.=:\, x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\supset_x.\, \mathrm{mp}(x,a) \,\varepsilon\, \mathrm{n} \times m$

·4·5 $a \varepsilon \mathrm{N}_1 + 1 \,.\, b \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset.$ §mp P1·8·9 ·6 = §mp2·1

·7 $u \varepsilon \mathrm{Cls'R} \,.\, \exists u \,.\supset.$ Ths §mp P2·3

·8 —— . Num$u \,\varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.$———————·4

{ ·6·7·8 Barrieu NAnn. a. 1895 t.14 :

·6 Tout nombre fractionnaire est un produit de facteurs premiers affectés d'exposants entiers, positifs, ou négatifs. (p. 96).

·7 Pour former le plus grand commun diviseur de n nombres, entiers ou ·ractionnaires, on fait le produit de tous les facteurs premiers qui entrent dans ces nombres, en affectant chacun de ces facteurs de son plus faible exposant. (p. 97).

·8 Il y a une loi de formation analogue pour former le plus petit commun multiple. (id.). }

Note. — Il convient de poser le §nt entre les §mlt, et §Cmb. Alors la P6 qu'on a ajoutée ici irait prendre sa place dans le §mp.

✱ 7. $p \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, p > 3 \,.\, n \varepsilon 1 \cdots (p-3)/2 \,.\, r \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.$

·1 $\mathrm{nt}\Sigma/[1 \cdots (p-1)] \;\varepsilon\; p^2 \times \mathrm{N}_1$ { Osborn a.1892 Mm. t.22 p.51 }

·2 $\mathrm{nt}\Sigma/[1 \cdots (p-1)]^2 \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times p$

·3 $\mathrm{nt}\Sigma/[1 \cdots (p-1)]^{2n-1} \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times p^2$

·31 » » $]^{2n} \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times p$

·4 $\mathrm{nt}\Sigma/[1 \cdots (p-1)] \upharpoonleft [r(p-1) + 2n - 1] \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times p^2$

·41 » » » $+\, 2n \;] \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times p$

·42 » » » $+\, p - 2] \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times p^2 - (r+2)p/2$

·43 » » » $] \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 \times p - 1$

{ ·2-·43 Glaisher a.1900 QJ. t.31 p.337 }

§Q P34.

·31 $a \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \Sigma a \upharpoonleft -(\mathrm{N}_1!) \,\varepsilon\, \mathrm{Q} - \mathrm{R}$

·91 $a \varepsilon (\mathrm{N}_1 \mathrm{f} \mathrm{N}_1)\mathrm{cres} \,.\supset.\, \Sigma\{[/\Pi(a, 1 \cdots n)] \,|n, \mathrm{N}_1\} \,\varepsilon\, \mathrm{Q} - \mathrm{R}$

———————$.\supset.\, /a_1 + /(a_1 a_2) + /(a_1 a_2 a_3) + \ldots \,\varepsilon\, \mathrm{Q} - \mathrm{R}$

{ Stern a.1848 JfM. p.95 }

{ ·31·91 Liouville JdM. a.1851 t.16 p.141 }

§q ✱ 44. f 1' q

·1 $f \varepsilon$ qfq : $y,z\varepsilon$q .$\supset_{y,z}$. $f(y+z) = fy + fz$: $a,b,x\varepsilon$q . $a < b$.
1'f'a⌐b εq :$\supset$. $fx = (f1) \times x$ { DARBOUX MA. a.1880 t.17 p.55 }

§E P3

·8 $a\varepsilon N_1$.$\supset$. $a! = \Pi\{\Pi[\Pi$|Np ∩ 0···E($s^{-1} \times {}^r\sqrt{a}$)] |$s$, N_1] |r, N_1}
{ TCHEBYCHEF a.1850, JdM. t.17 p.341 }

§λ

✱ 5. Int

$u,v\varepsilon$ Cls'q .$\supset$. ·0 Int$u$ = Iu = q-λ(q-u) Df

Note. Avec le symbole λ on peut exprimer simplement plusieurs autres classes introduites dans F1889, et ensuite par plusieurs A.

Notamment:

Int$u$ ou Iu	=	points intérieurs du domaine u
Eu = q - λu	=	» extérieurs »
Lu = λ(q - u) ∩ λu	=	» frontière »

·1 I$u \supset u$ ·2 IIu = Iu ·3 I(u ∩ v) = Iu ∩ Iv

·31 $u \supset v$.$\supset$. I$u \supset$ Iv ·32 I(u∪v) $\supset$ Iu ∪ Iv ·33 I(Iu∪Iv) = Iu∪Iv
[§λ P1·1-·33 .$\supset$. ·1-·33]

·4 λu = q-I(q-u) Df?
{ Cfr . §∇ P3·2 }

§lim P6

·31 $a\varepsilon\theta$.$\supset$. lim(a∖)^{n}1 |n ε Q

·32 ———————————— = ɿ Q ∩ xɜ($a^x = x$)

{ EISENSTEIN JfM. a.1844 t.28 p.49 }

13·21 $u\varepsilon$ qfN_0 . Lm Σ(u, 0···n) |$n \supset$q . $a\varepsilon$ (QfN_0)decr . lim$a$ =0 .$\supset$.
Σ(au,N_0) εq { ABEL t.1 p.222 }

·4 $a\varepsilon$ QfN_0 decr$_0$. Σ(a,N_0) =∞ . $n\varepsilon N_0$. $h\varepsilon$ 0···(n—1) .$\supset$.
Σ(a, $n \times N_0 + h$) =∞

18·4 { MANSION a.1887 *Rés. du cours d'Analyse inf.*, Paris p.281 }

18·6 $u\varepsilon$ qFN_0decr . lim$u$ =0 . Σmod$u$ =∞ . Σu εq .$\supset$.
lim[Σ(sgn$u$, 0···n)/n] |n =0 { CESÀRO *Anal. Alg.* p164 }

§e

·8 { EULER Misc. Berol. a.1743 t.7 p.177:

« $e^z = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ existente n numero infinito. »}

·25 $n\varepsilon N_1$. $x\varepsilon$ rf 1···n .$\supset$. $e^n + \Sigma(x_r e^{n-r}|r, 1 \cdots n)$ -=0

{ HERMITE a.1873 ParisCR. t.77 ; cfr. GORDAN a.1893 MA. t.43 }

§log P1.

·31 $m,n \varepsilon N_1 . m < n .\supset. \lim \Sigma/(mp \cdots np) \mid p = \log(m/n)$

{ Joh. BERNOULLI II a.1710⊣1790, a.1729 CorrM. t.2 p.300:
« Si l'on coupe la progression harmonique $1/x$ ... en deux parties ... soit la raison du nombre des termes dans la première et seconde partie comme m à n, la somme de tous les termes de cette seconde partie sera $= \log[(m+n)/n]$. »;

·8 $a \varepsilon (e \uparrow -/e) \dashv 1 .\supset.$

$\lim(a\uparrow)^n 1 \mid n = \Sigma\{(n+1)^{n-1}(\log a)^n/n! \mid n, N_0\}$

{ EULER PetrA. a.1777 t.1 {

{ MURPHY *A treatise on Alg. Equations*, London a.1838 p.81 {

{ EISENSTEIN JfM. a1844 t.27 p.51:

$$a^{a^{a}}\overset{in\ inf.}{} = 1 + \log a + 3\frac{(\log a)^2}{2!} + 4^2\frac{(\log a)^3}{3!} + \text{etc.}$$

und dieses Resultat gilt

von $a = \frac{1}{e\sqrt{e}} = 0{,}6922\ldots$ (excl.) *bis* $a = 1$ (incl.) . }

§π P1.

·81 $\pi \varepsilon \sqrt{(1+\sqrt{6})} + \sqrt{(9-3\sqrt{6})} - \theta X^{-3}$ { MASCHERONI a.1798 p.248 {

·82 $\pi \varepsilon 9/5 + 3/\sqrt{5} - \theta X^{-4}$

·83 $\pi \varepsilon \sqrt{(40/3 - 2\sqrt{3})} + 7\theta X^{-5}$ {

{ KOCHANSKI, *Acta eruditorum* a.1685 p.398 {

·84 $\pi \varepsilon (13\sqrt{146})/50 + \theta X^{-6}$ { SPECHT JfM. a.1828 t.3 p.83 {

·85 $\pi \varepsilon (501 + 80\sqrt{10})/240 - \theta X^{-7}$

{ GERGONNE Ann. de Math. a.1817 t.8 p.252 {

Note. — Les P·83 ·84 donnent des constructions géométriques assez simple pour π en observant que:

$\sqrt{(40/3 - 2\sqrt{3})} = \sqrt{[4 + (3 - /\sqrt{3})^2]}$; $(13\sqrt{146})/50 = (13/10)\sqrt{[1 + (11/5)^2]}$.

·9 $n \varepsilon N_1\ x \varepsilon \text{ rf } 1 \cdots n .\supset. \pi^n + \Sigma(x_r \pi^{n-r} \mid r, 1 \cdots n) -= 0$

{ LINDEMANN a·1882 MA. t.20 p.213;

cfr. GORDAN a.1893 MA. t.43 p.222 {

✱ 5. $n \varepsilon N_1 . \sigma_n = \Sigma(N_1 \frown n/N_1) .\supset.$

·1 $\lim\{(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n)/n^2\} \mid n = \pi^2/12$

·2 $\lim\{(\sigma_1/1 + \sigma_2/2 + \ldots + \sigma_n/n)/n\} \mid n = \pi/^2 6$

·3 $\lim\{(\sigma_1/1 + \sigma_2/4 + \ldots + \sigma_n/n^2)/\log n\} \mid n = \pi^2/6$

·4 $\lim\{(\Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n)/n^2\} \mid n = 3/\pi^2$

·5 $\lim\{(\Phi_1/1 + \Phi_2/2 + \ldots + \Phi_n/n)/n\} \mid n = 6/\pi^2$

·6 $\lim\{(\Phi_1/1 + \Phi_2/4 + \ldots + \Phi_n/n^2)/\log n\} \mid n = \pi^2/6$

{ ·1-·6 CESÀRO a.1893 *NapoliA.* s.2 t.6 N°11 p.15 {

§sin

2·3 | EULER PetrNC. a.1760 t.5 p.204 |

4·5 $a \varepsilon$ (QfN_0)decr . lim$a = 0$. $x \varepsilon$ q-$2n\pi$.$\supset$. $\Sigma[(a_r \cos rx)|r, N_1]$ εq

·6 ——————————— . $x\varepsilon$q .$\supset$. $[\Sigma(a_r \sin rx)|x, N_0]$ εq

| BJÖRLING |

5·6 $x \varepsilon (-\pi/2)^-(\pi/2)$.$\supset$. $\log(\cos x + i \sin x) = ix$

| COTES a.1714 London PhilTrans. t.29 p.32 :

«... si quadrantis circuli quilibet arcus [x], radio CE [1] descriptus sinum habeat CX [sin$x$], sinumque complementi ad quadrantem XE [cos$x$]: sumendo radio CE pro Modulo, arcus erit rationis inter EX+XC$\sqrt{-1}$ et CE [cos$x$ + i sin$x$] mensura ducta in $\sqrt{-1}$. » |

§sin^{-1} P1n

Euler, *Misc. Berol.* a.1743 t.7 p.167 a adopté les notations: sinAx, Asin$x$, au lieu de: sin$x$, sin^{-1}x; où A est l' initiale de Arc.

§sin^{-1} P3.

·341 $(m,n,x,y)\ni[m,n\varepsilon$n . $x,y \varepsilon N_1$. $x<y$. $m$tng$^{-1}x + n$tng$^{-1}y = \pi/4]$ $= \iota(1,1,2,3) \cup \iota(2,-1,2,7) \cup \iota(2,1,3,7) \cup \iota(4,-1,5,239)$

| STÖRMER BsF. a.1899 t.27 p.170 |

·37 $\pi = \Sigma\{$tng$^{-1}/(2n^2)|n, N_1\}$

§vct P8·44 | LAGNY Paris M. a.1706 p.319 :

Dans tout parallelogramme la somme des quarrez des deux diagonales est égale à la somme des quarrez des quatre côtez. |

35·2n | REGIOMONTANUS a.1533 p.95 :

In omni triangulo ... sinus laterum ad sinus angulorum eis oppositorum eandem habent proportionem.

§103 ∇

* 1. $k \varepsilon$ Cls'pnt . $k \supset \delta k$. $p \varepsilon k$. $u,v \varepsilon$ qf$k$.$\supset$.

·0 $\nabla(u,k,p) =$

$\imath$ vct $\frown$ $v\ni\{\lim\{[((uq-up) - (q-p)\times v]/\mathrm{mod}(q-p)] \,|q, k, p\} = 0\}$ Df

Hamilton a introduit cet operateur ∇ dans ses *Lectures on Quaternions*, Dublin a.1853, p.610.

Lamé (JdM. a.1840 t.5 p.316) avait déjà étudié le mod$\nabla(u,k,p)$ en l'appellant « paramètre différentiel de premier ordre de la fonction u ».

·1 $\nabla(u+v, k, p) = \nabla(u,k,p) + \nabla(v,k,p)$

* 2. $u \varepsilon$ vct . $a,p \varepsilon$ pnt . $m \varepsilon 2+N_0$.$\supset$.

·1 $\nabla[u\times(p-a)\,|p, \mathrm{pnt}, p] = u$ ·2 $\nabla[(p-a)^2\,|p, \mathrm{pnt}, p] = 2(p-a)$

·3 $\nabla[\mathrm{mod}(p-a)\,|p, \mathrm{pnt}\text{-}\iota a, p] = \mathrm{U}(p-a)$

·4 $\nabla\{[\mathrm{mod}(p-a)]^m\,|p, \mathrm{pnt}, p\} = m\,[\mathrm{mod}(p-a)]^{m-1}\mathrm{U}(p-a)$

§log P1.

·31 $m,n\varepsilon N_1 . m<n .\supset. \lim \Sigma/(mp\cdots np)\ |p = \log(m/n)$

{ Joh. BERNOULLI II a.1710—1790, a.1729 CorrM. t.2 p.

« Si l'on coupe la progression harmonique $1/x$ ... en deux parties .
raison du nombre des termes dans la première et seconde partie com
la somme de tous les termes de cette seconde partie sera $= \log[(m$

·8 $a\varepsilon\ (e\text{⌈}-/e)^{-}1 .\supset.$

$\lim(a\text{⌈})^n 1\ |n = \Sigma\{(n+1)^{n-1}(\log a)^n/n!\ |n,\ N_0\}$

{ EULER PetrA. a.1777 t.1 {

{ MURPHY *A treatise on Alg. Equations*, London a.

{ EISENSTEIN JfM. a1844 t.27 p.51:

$$a^{a^{a\ \text{in inf.}}} = 1+\log a+3\frac{(\log a)^2}{2!}+4^2\frac{(\log a)^3}{3!}+\text{etc.}$$

und dieses Resultat gilt

von $a=\frac{1}{e\sqrt{e}}=0{,}6922...$ (excl.) *bis* $a=1$ (incl.)

§π P1.

·81 $\pi\ \varepsilon\ \sqrt{(1+\sqrt{6})}+\sqrt{(9-3\sqrt{6})}-\theta X^{-3}$ { MASCHER

·82 $\pi\ \varepsilon\ 9/5+3/\sqrt{5}-\theta X^{-4}$

·83 $\pi\ \varepsilon\ \sqrt{(40/3-2\sqrt{3})}+7\theta X^{-5}$ {

{ KOCHANSKI, *Acta eruditorum*

·84 $\pi\ \varepsilon\ (13\sqrt{146})/50+\theta X^{-6}$ { SPECHT Jf

·85 $\pi\ \varepsilon\ (501+80\sqrt{10})/240-\theta X^{-7}$

{ GERGONNE Ann. de Math.

Note. — Les P·83 ·84 donnent des constructions
pour π en observant que:

$\sqrt{(40/3-2\sqrt{3})} = \sqrt{[4+(3-/\sqrt{3})^2]}$; $(13\sqrt{146}/50$

·9 $n\varepsilon N_1\ x\varepsilon\ \text{rf}\ 1\cdots n\ .\supset.\ \pi^n+\Sigma(x_r\pi^{n-r}$

{ LINDEMANN a·1882 MA. t.20 p.21

cfr. GORDAN a.1893 MA. t.43 p.222 {

✱ 5. $n\varepsilon N_1 . \sigma_n=\Sigma(N_1\frown n/N_1) .\supset.$

·1 $\lim\{(\sigma_1+\sigma_2+...+\sigma_n)/n^2\}\ |n = \pi^2/12$

·2 $\lim\{(\sigma_1/1+\sigma_2/2+...+\sigma_n/n)/n\}\ |n =$

·3 $\lim\{(\sigma_1/1+\sigma_2/4+...+\sigma_n/n^2)/\log n\}$

·4 $\lim\{(\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_n)/n^2\}\ |n =$

·5 $\lim\{(\Phi_1/1+\Phi_2/2+...+\Phi_n/n)/n\}$

·6 $\lim\{(\Phi_1/1+\Phi_2/4+...+\Phi_n/n^2)$

{ ·1-·6 CESÀRO a.1893 *Nap*

✱ 3.

·1 Hp P1 . $up = \max u{}^{\backprime}k$. $\gamma(u,k,p)\ \varepsilon$ vct .⊃. $\gamma(u,k,p) = 0$

·2 Hp P1 . $l\varepsilon(\mathrm{Int}k)\mathrm{F}\Theta$. $t\varepsilon\Theta$. Dlt, $\gamma(u,k,lt)\ \varepsilon$ vct .⊃.
D$(ul, \Theta, t) = \gamma(u,k,lt) \times$ Dlt

·3 Hp P·2 . $ult = \max ul{}^{\backprime}\Theta$.⊃. $\gamma(u,k,lt) \times$ D$lt = 0$

Additions au Formulaire par M. Chini.

§∃

$n\varepsilon\mathrm{N}_1$. $x\varepsilon\mathrm{Q}$.⊃. $\mathrm{E}(\sqrt[n]{x}) = \imath\mathrm{N}_0 \frown z\ni[z \leq x < (z+1)^n]$
» $\mathrm{E}(\sqrt[n]{x}) = \mathrm{E}(\sqrt[n]{\mathrm{E}x})$

§vct

10·91 $u,v,w\varepsilon$ vct . $x\varepsilon$q .⊃. $(u\times v)(xw) = (xu\times v)w$
$u,v,w\varepsilon$ vct$-\iota 0$.⊃. $(u\times v)^2 = u^2v^2$.=. $u\varepsilon$ qv
$(u\times v)w = (u\times w)v$.=. $v\varepsilon$ qw

§D vct U D

56. $u\varepsilon$ (vct$-\iota$0)Fq . Du ε vctFq .⊃. Dmod$u$ = Uu×Du
D Uu = [(cmp⊥u)Du]/mod$u$

§102 rectaTang Norm curvatura

✱ 4. $p\varepsilon$ pntFq . $t\varepsilon$q . Dpt ε vct$-\iota$0 . D²pt ε vct$-$qDpt .⊃.
Norm(p,t) = recta[pt, (cmp⊥Dpt)(D²pt)] Df
Norm(p,t) = recta[pt, D(UDpt)]
curvatura(p,t) = modD(UDpt)/modDpt Df

Additions au Formulaire par G. Eneström.

§— note. Ajoutez :

On rencontre les signes + et —, employés régulièrement avec la signification actuelle, chez G r a m m a t e u s a.1521. (Voir M. Cantor, t.2 (éd.2) p.39.)

§π P1·5. Au lieu de P. Metius mettez A. A n t h o n i s z. (Voir BM a.1888 p.36; 1889 p.84.)

§π P2·3 Remplacez la citation par:

{ Euler: a.1735(?) ; CPetrop. t.7 a.1740. (Voir BM a.1890 p.24.) }

Additions au Formulaire par G. PEANO.

§Σ P1

·8 $m,n\varepsilon N_1 . u\varepsilon N_0 f(1\cdots m ; 1\cdots n) .\supset.$
$\Sigma\{\Sigma[u(r,s)|r, 1\cdots m] |s, 1\cdots n\} = \Sigma\{\Sigma[u(r,s)|s, 1\cdots n] |r, 1\cdots m\}$

§Σ P10

$n\varepsilon N_1 . a\varepsilon (0\cdots 9)f(0\cdots n) . m\varepsilon N_1 .\supset.$

·1 $\Sigma(a_r X^r |r, 0\cdots n) \varepsilon 2N_0 .=. a_0 \varepsilon 2N_0$

·2 » $\varepsilon 3N_0 .=. \Sigma(a, 0\cdots n) \varepsilon 3N_0$

·3 » $\varepsilon 4N_0 .=. a_0+2a_1 \varepsilon 4N_0$

·4 » $\varepsilon 5N_0 .=. a_0 \varepsilon 5N_0$

·5 » $\varepsilon 9N_0 .=. \Sigma(a, 0\cdots n) \varepsilon 9N_0$

·6 » $\varepsilon 2^m N_0 .=. a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_{m-1}X^{m-1} \varepsilon 2^m N_0$

·7 » $\varepsilon 5^m N_0 .=.$ » » » » $\varepsilon 5^m N_0$

§Np 4·32 $Np - \iota 2 \cap (4N_1+1) \supset N_1^2+N_1^2$
$Np \cap [(8N_1+1) \cup (8N_1+3)] \supset N_1^2+2N_1^2$
$Np \cap [(8N_1+1) \cup (8N_1-1)] \supset N_1^2-2N_1^2$

Continuation : LEGENDRE a.VI tables 3 et 4.

5·23 $a\varepsilon N . 2a+1 \varepsilon Np . b\varepsilon n - n(2a+1) .\supset.$
$(-b)^a-1 \varepsilon n(2a+1) .=. b\varepsilon n^2 + (2a+1)n$
[LEGENDRE a.VI N.134]

Les nombres n^2+an s'appellent « résidus quadratiques de a ».

·24 $n\varepsilon N . x\varepsilon N F 1\cdots n . a\varepsilon Np .\supset. (\Sigma x)^a-\Sigma(x^a) \varepsilon N\times a$

·31 $2^2-1, 2^3-1, 2^5-1, 2^7-1 \varepsilon Np$ { EUCLIDES IX P36 scolia }

·32 $2^{13}-1, 2^{17}-1, 2^{19}-1 \varepsilon Np$

·33 $2^1+1, 2^2+1, 2^4+1, 2^8+1, 2^{16}+1 \varepsilon Np$

12·34 $a\varepsilon (N_1+4)-Np .\supset. (a-1)! \varepsilon N_1\times a$

§mp 2·7 $n\varepsilon N . x\varepsilon N F 1\cdots n . a\varepsilon Np .\supset.$
$mp(a, \Pi x) = \Sigma[mp(a, x_r)|r, 1\cdots n]$

§Q

25·6 $x\varepsilon Q-N_1^2 .\supset. \sqrt{x} - [x-(E\sqrt{x})^2]/(2E\sqrt{x}+1) \varepsilon \theta/[4(2E\sqrt{x}+1)]$

{DARBOUX, *Sur l'extraction de la racine carrée*, BD. a.1887 p.176}

§q44·1 $u,v\varepsilon$ Cls'q . $1_{\prime}mod u = 1_{\prime}mod v = 0 .\supset. 1_{\prime}mod(u+v) = 0$

§ λ δ

P2·1 Dem

§+P8.3 $.\supset:$ $a\varepsilon \lambda u+\lambda v .=. \exists(b;c)\ni(b\varepsilon\lambda u . c\varepsilon\lambda v . b+c=a)$

Df λ $.\supset:$ » $.=.$ » $[1_{\prime}m(u-b)=0 . 1_{\prime}m(v-c)=0 . b+c=a]$

§q P44·1 $.\supset:$ » $.\supset.$ » $[1_{\prime}mod(u+v-b-c)=0 . b+c=a]$

» $.\supset. 1_{\prime}mod(u+v-a)=0$. Df λ $.\supset. a\varepsilon \lambda(u+v)$

2·11 $u,v \varepsilon$ Cls'q . $a\varepsilon$q .⊃. $\lambda(a+u) = a + \lambda u$ ·31 $\lambda(au) = a\lambda u$

·12 l' mod u, l' mod v ε Q .⊃. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

§δ. **M. Vivanti a continué la bibliographie de ces sujets dans: Lista bibliografica della teoria degli aggregati 1893-1899, BM. a.1900 p.160**

4·41 $u\varepsilon$ Cls'q . Num$u$ ε infn . l' mod$u$ εQ .⊃.

l' q$\frown x$ ∍ {Num[$u\frown(x+$Q)] ε infn} = max δu .

l, » » — » = min δu

§Lm 1. $x\varepsilon$ qfN$_0$.⊃:

·01 Lmx ⊃ $\Lambda(x$'N$_0)$ ·02 $m\varepsilon$N$_0$.⊃. Lmx ⊃ Λ x'(m+N$_0$)

2·91 Lm $(-1)^n|n = \iota 1 \cup \iota(-1)$

✱ 3.

·1 $m\varepsilon$N$_1$.⊃. Lm$\beta(n/m)|n$ = [0···(m−1)]/m

·2 $a\varepsilon$R .⊃. Lm $\beta(an)|n$ = [0···(dt$a$ −1)]/dt$a$

·3 $a\varepsilon$ Q−R .⊃. Lm $\beta(an)|n = \Theta$ ·31 Lm $\beta\sqrt{} = \Theta$

·4 Lm $[n-(\text{E}\sqrt{n})^2]|n$ = N$_0$ ∪ $\iota\infty$ ·41 Lm $[n-(\text{E}\sqrt{n})^2]/\sqrt{n}\ |n = 2\Theta$

§lim P6·31 $a\varepsilon$Q .⊃. lim $\sqrt[n]{a}|n = 1$

✱ 7.

1 $a\varepsilon$Q . $n\varepsilon$N$_1$.⊃. lim{[$\sqrt[n]{(a+x)}$ |x]^r 0}|r = ɿQ$\frown x$∍($x^n - x - a$) = 0

{ Joh. Bernoulli t.4 p.13:

« universaliter $\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a\ \&c.)})})})}$ pro aequatione habebitur $x^n - x - a = 0$ » }

9·1 $u\varepsilon$ qfN$_0$. lim u εq .⊃. lim[Σ(u, 1···n)/n]|n = lim u

11·5 $u,v\varepsilon$ Q fN$_0$: $n\varepsilon$N$_0$.⊃$_n$. $u_n < v_n$: Σ(v,N$_0$) εQ .⊃. Σ(u,N$_0$) εQ

·6 $u\varepsilon$ Qf(N$_0$:N$_0$) .⊃. Σ{Σ[$u(m,n)|n$, N$_0$]|m, N$_0$} =

Σ{Σ[$u(m,n)|m$, N$_0$]|n, N$_0$}

15·4 $u,v\varepsilon$ QfN$_0$: $r\varepsilon$N$_0$.⊃$_r$. $u_{r+1}/u_r < v_{r+1}/v_r$: Σ(u,N$_0$)εQ :⊃.

Σ(u,N$_0$)εQ

§limP17

·2 $x\varepsilon\theta$.⊃. Σ[$x^n/(1-x^n)$ |n, N$_1$] = Σ{Num(N$_1$$\frown$ n/N$_1$)×x^n |n, N$_1$}

{ Lambert *Architechtonik* a.1771 t.2 p.507 }

·3 $x\varepsilon\theta$.⊃. Σ[$nx^n/(1-x^n)$|n,N$_1$] = Σ{Num[N$_1$$\frown$ n/(N$_1$+1)] x^n |n, N$_1$}

{ Euler PetrNC. t.5 a.1760 p.70 }

16·5 $n\varepsilon$ QfN$_0$. $h\varepsilon$Q . ∞ −ε Lm $n^{1+h}u_n$ |n .⊃. Σ(u,N$_0$) εQ

19·6 $u\varepsilon$ q f (N$_0$:N$_0$) . Σ[[l' mod $u(m,n)|m$ 'N$_0$)]|n, N$_0$] εQ :

$n\varepsilon$N$_1$.⊃n. lim $u(m,n)|m$ εq :⊃. lim Σ[$u(m,n)|n$, N$_0$] |m

= Σ[[lim $u(m,n)|m$]|n,N$_0$] . [Comm(Σ, lim)]

22·4 $a\varepsilon 1+\mathrm{Q} .\supset. /(a-1) = \Sigma\{n!/\Pi[(a+r)|r, 1\cdots n]|n, \mathrm{N}_1$
{ STIRLING a.1730 p. 11 }

23·2 $x\varepsilon\mathrm{r} .\supset. \lim [\beta(n!x)+\beta(-n!x)]|n = \lim (\mathrm{sgn}\, \beta\, n!x)|n = 0$

·21 $x\varepsilon \mathrm{q-r} .\supset.$ » » » » » $=1$

31·0 $\lim [\mathrm{Num}(\mathrm{Np} \frown 1\cdots n) /n]|n = 0$ [LEGENDRE a.VI p.464]

§e ·81 $\lim {}^n\surd[(2n)! / (n!n)] |n = 4/e$

§log 1·32 $\log 2 = /2+/(2\times 2^2)+/(3\times 2^3)+\ldots$ [P·3 . $x=-/2 .\supset.$ P]

·41 $\log 2 = 2[/3 + /(5\times 3^5) + /(7\times 3^7) + \ldots$ [P·4 . $x=1 .\supset:$ P]

·42 $\log[(a+b)/2 = (\log a + \log b)/2+\{\Sigma[(a-b)/(a+b)]^n/n\ |n, \mathrm{N}_1\}$

2·2 $n\varepsilon\mathrm{N}_1 .\supset.$
$\lim\{[\mathrm{Num}\,\mathrm{Np}\frown 1\cdots x]/x-\Sigma[r!/(\log x)^{r+1}\ |r, 0\cdots n]\}(\log x)^{n+2}\ |x = (n+1)!$
{ TCHEBYCHEFF JdL t.17 p.384 }

§ Subst P5

·6 $n\varepsilon\mathrm{N}_1 . u\varepsilon\, \mathrm{qF}(1\cdots n \,\mathrm{f}\, 1\cdots u) . \mathrm{Dtrm}\, u -= 0 . y\varepsilon \mathrm{q}_n .\supset:$
$x\varepsilon \mathrm{q}_n . (\mathrm{Sb}u)x = y .=. x = (\mathrm{Sb}u)^{-1}y$

§sin 2·4 $\mathrm{Lm}(\sin, \mathrm{q}, \infty) = (-1) \vdash 1$
$\mathrm{Lm}(x\sin x\ |x, \mathrm{q}, \infty) = \mathrm{q} \cup \iota\infty \cup \iota(-\infty)$

§vct P9

·5 $a,b,c\varepsilon\, \mathrm{pnt} . \mathrm{mod}(a-b) = \mathrm{mod}(a-c) = \mathrm{mod}(b-c) = 1 .\supset.$
$\mathrm{mod}[(a+b)/2-c] = \surd 3 /2$.
$\mathrm{mod}[(a+b+c)/3-a] = /\surd 3$ { EUCLIDES XIII P12:
« *Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ του τριγώνοα πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τȣ̃ κέντρȣ τȣ̃ κύκλȣ.* » }

·6 $a,b,c,d\varepsilon\, \mathrm{pnt} . \mathrm{mod}(a-b) = \mathrm{mod}(a-c) = \mathrm{mod}(a-d) = \mathrm{mod}(b-$
$c) = \mathrm{mod}(b-d) = \mathrm{mod}(c-d) = 1 .\supset.$
$\mathrm{mod}[(a+b)/2-(c+d)/2] = \surd(/2)$.
$\mathrm{mod}[(a+b+c)/3-d] = \surd(2/3)$.
$\mathrm{mod}[(a+b+c+d)/4-a] = \surd 6 /4$ { EUCLIDES XIII P13:
« *ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.* » }

§ vct P13

·2 $a,b,c\varepsilon\, \mathrm{pnt} . m,n\varepsilon \mathrm{q} .\supset.$
$[(m+n)a-(mb+nc)]^2 = m(m+n)(a-b)^2+n(m+n)(a-c)^2-mn(b-c)^2$

STEWART Matthew, a. 1717 ⊢ 1785.
— *Propositiones geometricae more veterum demonstratae*, Edinburgh a.1763. § vct P13·2

·3 $a,b,c,d \varepsilon$ pnt . $m,n,p \varepsilon$q .Ɔ.
$[(m+n+p)a-(mb+nc+pd)]^2 = (m+n+p)[m(a-b)^2+n(a-c)^2$
$+p(a-d)^2] - mn(b-c)^2 - mp(b-d)^2 - np(c-d)^2$

§vct P23
·2 $u,v \varepsilon$ vct f 1···4 .Ɔ. Dtrm$[u_r \times v_s \,|(r,s),$ 1···4 ! 1···4$] = 0$

§vct 34.
·3 $a,b,c \varepsilon$ pnt . $\mathrm{mod}(a-b) = \mathrm{mod}(a-c) = \mathrm{mod}(b-c) = 1$.Ɔ.
$\cos(b-a, c-a) = \sin[a-b, a-(b+c)/2] = /2$.
sin » = cos » » $= \sqrt{3}/2$
·4 $a,b,c,d \varepsilon$ pnt . $\mathrm{mod}(a-b) = \mathrm{mod}(a-c) = \mathrm{mod}(a-d) = \mathrm{mod}(b-c) = \mathrm{mod}(b-d) = \mathrm{mod}(c-d) = 1$.Ɔ.
$\cos[(a+b)/2-c, (a+b)/2-d] = /3$
sin » » » » $= 2\sqrt{2}/3$
$\cos[(a+b)/2-c, (a+b)/2-(c+d)/2] = \sqrt{(2/3)}$
sin » » » » » $= \sqrt{/3}$

Additions au Formulaire par T. Boggio.

§sin 5·11 $m \varepsilon$n . $x \varepsilon$q .Ɔ.

$\sin[(4m+1)\pi/2+x] = +\cos x$	$\sin[(4m+2)\pi/2+x] = -\sin x$
» − = + »	» − = + »
$\sin[(4m+3)\pi/2+x] = -$ »	$\sin[(4m+4)\pi/2+x] = +$ »
» − = − »	» − = − »

·12

$\cos[(4m+1)\pi/2+x] = -\sin x$	$\cos[(4m+2)\pi/2+x] = -\cos x$
» − = + »	» − = − »
$\cos[(4m+3)\pi/2+x] = +$ »	$\cos[(4m+4)\pi/2+x] = +$ »
» − = − »	» − = + »

·21 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 1 - 2(\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1$
$x \varepsilon 4n\pi + 2\Theta\pi$.Ɔ. $\sin x/2 = +\sqrt{[(1-\cos x)/2]}$
$x \varepsilon (4n+2)\pi + 2\Theta\pi$ » − »
$x \varepsilon$q .Ɔ. $\sin x/2 = [(-1) \upharpoonright \mathrm{E}\{x/(2\pi)\}]\sqrt{[(1-\cos x)/2]}$
·22 $x \varepsilon 2n\pi + \Theta\pi$.Ɔ. $\sin x = +\sqrt{[1-(\cos x)^2]}$
$x \varepsilon (2n+1)\pi + \Theta\pi$ » − »
$x \varepsilon$q .Ɔ. $\sin x = [(-1) \upharpoonright \mathrm{E}(x/\pi)]\sqrt{[1-(\cos x)^2]}$
$x \varepsilon (4n-1)\pi/2 + \Theta\pi$.Ɔ. $\cos x = +\sqrt{[1-(\sin x)^2]}$
$x \varepsilon (4n+1)\pi/2 + \Theta\pi$ » − »
$x \varepsilon$q .Ɔ. $\cos x = [(-1) \upharpoonright \mathrm{E}(x/\pi + /2)]\sqrt{[1-(\sin x)^2]}$

·23 $x \varepsilon (8n-1)\pi/2+\Theta\pi \,.\supset.\, 2\sin x/2 = + \surd(1+\sin x) - \surd(1-\sin x)$

$\quad$ » $\quad 2\cos x/2 = +$ » $+$ »

$x \varepsilon (8n+1)\pi/2+\Theta\pi \,.\supset.\, 2\sin x/2 = +$ » $+$ »

$\quad$ » $\quad 2\cos x/2 = +$ » $-$ »

$x \varepsilon (8n+3)\pi/2+\Theta\pi \,.\supset.\, 2\sin x/2 = -$ » $+$ »

$\quad$ » $\quad 2\cos x/2 = -$ » $-$ »

$x \varepsilon (8n+5)\pi/2+\Theta\pi \,.\supset.\, 2\sin x/2 = -$ » $-$ »

$\quad$ » $\quad 2\cos x/2 = -$ » $+$ »

$x \varepsilon q \,.\supset.$

$2\sin x/2 =$

$[(-1)\upharpoonleft E\{x/(2\pi)+/4\}]\surd(1+\sin x) - [(-1)\upharpoonleft E(x/(2\pi)+3/4)]\surd(1-\sin x)$

$2\cos x/2 =$ » $+$ »

$x,y \varepsilon q \,.\supset.$

·32 $2\sin x \cos y = \sin(x+y)+\sin(x-y)$

$2\sin x \sin y = \cos(x-y)-\cos(x+y)$

$2\cos x \cos y = \cos(x+y)+\cos(x-y)$

·33 $\sin x + \sin y = 2\sin(x+y)/2 \ \cos(x-y)/2$

$\cos x + \cos y = 2\cos(x+y)/2 \ \cos(x-y)/2$

$\cos x - \cos y = 2\sin(x+y)/2 \ \sin(-x+y)/2$

·34 $x,y,m \varepsilon q \,.\supset.$

$\sin(x+my) = 2\cos y \sin[x+(m-1)y] - \sin[x+(m-2)y]$

$\cos(x+my) = 2\cos y \cos[x+(m-1)y] - \cos[x+(m-2)y]$

·35 $x,y \varepsilon q \,.\, y -\varepsilon\, 2n\pi \,.\, m \varepsilon N_0 \,.\supset.$

$\Sigma[\sin(x+2ry)|r,0\cdots m] = \sin(x+my)\sin(m+1)y \,/\, \sin y$

$\Sigma[\cos(x+2ry)|r,0\cdots m] = \cos(x+my)\sin(m+1)y \,/\, \sin y$

·36 $m \varepsilon N_1 \,.\, x \varepsilon q - n\pi \,.\supset.$

$2\Sigma[\sin rx)^2|r,1\cdots m] = m - \cos(m+1)x \sin mx \,/\, \sin x$

$2\Sigma[(\cos rx)^2|r,1\cdots m] = m-1+\cos mx \sin(m+1)x \,/\, \sin x$

$x,y,z \varepsilon q \,.\supset.$

·37 $[\sin(x+y)]^2+[\sin(x-y)]^2 = 1-\cos 2x \cos 2y$

$\quad$ » $-$ » $= \sin 2x \sin 2y$

·38 $(\sin x)^2+(\sin y)^2-[\sin(x+y)]^2 = -2\sin x \sin y \cos(x+y)$

$\quad$ » » $-$ $+$ » $-$

.39 $[\cos(x+y)]^2+[\cos(x-y)]^2 = 1+\cos 2x \cos 2y$

$\quad$ » $-$ » $= -\sin 2x \sin 2y$

·40 $\sin(x+y+z) = \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z +$
$\cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z$

$\cos(x+y+z) = \cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z +$
$\sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \sin z$

·41 $\sin x + \sin y + \sin z =$
$\sin(x+y+z) + 4 \sin (x+y)/2 \sin (x+z/2 \sin(y+z)/2$

$\sin x + \sin y - \sin z =$
$-\sin(x+y+z) + 4 \sin (x+y)/2 \cos (x+z)/2 \cos(y+z)/2$

·42 $\cos x + \cos y + \cos z =$
$-\cos(a+y+z) + 4 \cos (x+y)/2 \cos (x+z)/2 \cos (y+z/2$

$\cos x + \cos y - \cos z =$
$\cos(x+y+z) + 4 \cos (x+y)/2 \sin (x+z)/2 \sin (y+z)/2$

·43 $\sin(x-y) + \sin(x-z) + \sin(y-z) =$
$4 \cos (x-y)/2 \sin (x-z)/2 \cos(y-z)/2$

$[\sin(x-y)]^2 + [\sin(x-z)]^2 + [\sin(y-z)^2] =$
$2[1 - \cos(x-y)\cos(x-z\cos(y-z)]$

$\sin (x+z)/2 \cos (x-z)/2] + \sin(y-z)/2 \cos (y+z)/2] =$
$(\sin x + \sin y)/2$

·44 $\cos(x-y) + \cos(x-z) + \cos(y-z) =$
$-1 + 4 \cos (x-y)/2 \cos(y-z)/2 \cos(x-z)/2$

$\cos(x-y)^2 + \cos(x-z)^2 + \cos(y-z)^2 =$
$1 + 2 \cos(x-y) \cos(x-z) \cos(y-z)$

·45 $\sin(x+y-z) + \sin(x-y+z) + \sin(-x+y+z) - \sin(x+y+z) =$
$4 \sin x \sin y \sin z$

$\cos(x+y-z) + \cos(x-y+z) + \cos(-x+y+z) + \cos(x+y+z) =$
$4 \cos x \cos y \cos z$

·46 $1 + \cos x + \cos y + \cos z + \cos x \cos y + \cos y \cos z + \cos z \cos x +$
$\cos x \cos y \cos z = 8[\cos(x/2)\cos(y/2)\cos(z/2)]^2$

$1 - \cos x^2 - \cos y^2 - \cos z^2 + 2 \cos x \cos y \cos z = 4 \sin (x+y+z)/2$
$\sin (y+z-x)/2 \sin (z+x-y)/2 \sin (x+y-z)/2$

$1 - \cos x^2 - \cos y^2 - \cos z^2 - \cos x \cos y \cos z = - 4 \cos (x+y+z)/2$
$\cos (y+z-x)/2 \cos (z+x-y)/2 \cos (x+y-z)/2$

·50 $x+y+z = \pi$.⊃.
$\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos x/2 \cos y/2 \cos z/2$
$\sin x + \sin y - \sin z = 4 \sin x/2 \sin y/2 \cos z/2$
$\cos x + \cos y + \cos z = 1 + 4 \sin x/2 \sin y/2 \sin z/2$

NUMERI INTERI RELATIVI

per A. Padoa a Roma.

Presento ai lettori della RdM. la trascrizione ideografica di un mio saggio d'una teoria dei *numeri interi relativi* (positivi o negativi), in cui non è presupposta alcuna conoscenza dei *numeri interi assoluti* (positivi) (¹).

Le 97 proposizioni sono enunciate e (tranne le proposizioni primitive e le definizioni) dimostrate mediante 9 *simboli logici* (, ε Cls ⊃ = ∃ ∩ ɜ ɿ) e 9 *simboli algebrici* (n suc sym prec 0 1 + × —) (²); di questi ultimi, i primi 3 sono assunti quali *primitivi* (vedi P 1-7), gli altri 6 sono *definiti* (vedi P 15, 26, 30, 37-39, 58-60, 75) (³).

I simboli « 0 » ed « 1 » conservano qui il loro significato ordinario.

Il simbolo « n » rappresenta qui, come nel *Formulaire*, la classe dei numeri interi relativi; poichè in questo scritto non si considerano altre classi di numeri, può esser letto brevemente « *numero* » (⁴).

Nell'algebra ordinaria il segno « — » ha due significati diversi, secondochè *precede un numero* ovvero *sta fra due numeri*. Per eliminare tale ambiguità, al segno « — » ho sostituito nel *primo* caso il simbolo « sym » (che si può leggere « *il simmetrico di* »), facendo uso del segno « — » soltanto nel *secondo* caso (⁵). Il diverso significato dei simboli « sym »

(¹) *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque.* Congresso internazionale di Filosofia, Parigi, 3 agosto 1900.

(²) Oltre alle *lettere*, all'*interpunzione logica* ed alle consuete *abbreviazioni* (P Pp Hp Ts Df). Ho trascritto i simboli logici ed algebrici nell'ordine in cui ne ho fatto uso.

(³) Conservo la numerazione delle P, per facilitare un eventuale raffronto con l'originale. (Vedi *Bibl. du Congrès int. de phil.*, t. III, p.309-365, Armand Colin, Paris).

(⁴) Nell'originale questa idea è invece rappresentata dal simbolo « ent » (*entier*).

(⁵) Mentre ho assunto vantaggiosamente quale primitivo il simbolo « sym », non sarebbe stato certo opportuno assumere quale primitivo l'ordinario « — »; ciò dimostra l'utilità espositiva della distinzione enunciata.

e « — » è chiarito dalle P 85 e 75, le quali mostrano che tali simboli equivalgono rispettivamente alle scritture « 0 — » e « + sym ».

Nell'algebra ordinaria anche il segno « + » ha due significati diversi, analoghi a quelli ora commentati dell'ordinario segno « — ». Qui è fatto uso del segno « + » soltanto nel *secondo* caso ([1]).

In attesa d'aver definiti i simboli « + » e « — », ho fatto uso dei simboli « suc » e « prec » (che si possono leggere « *il successivo di* » ed « *il precedente di* »), attribuendo loro tale significato per cui « $a \varepsilon$ n $. \supset .$ suc $a = a + 1$. prec $a = a - 1$ » (Vedi P41 ed 86).

Il simbolo « $\times$ » conserva qui il significato ordinario; esso però non è mai sottinteso ([2]).

***

È chiaro anzitutto che l'*interpretazione* enunciata del *sistema di idee primitive* (n suc sym) verifica il seguente *sistema di proposizioni primitive*.

$a, b, c, d \varepsilon$ n . $u \varepsilon$ Cls $. \supset .\because$ ([3])

1.	suc$a$ ε n	Pp
2.	sym$a$ ε n	Pp
3.	sym(sym$a$) $= a$	Pp
4.	sym{suc[sym(suc$a$)]} $= a$	Pp
5.	$\exists$ n$\frown$ $x \ni$(sym$x = x$)	Pp
6.	sym$a = a$. sym$b = b$ $. \supset .$ $a = b$	Pp
7.	$\exists$ n$\frown u$: $x \varepsilon$ n$\frown u$ $. \supset_x .$ suc$x$ εu : $y \varepsilon$ n . suc$y$ εu $. \supset_y .$ $y \varepsilon u$: $\supset .$ n $\supset u$	Pp

***

Il sistema di proposizioni primitive è irriducibile; in altri termini, le enunciate Pp sono assolutamente indipendenti; il

([1]) Conseguentemente, qui non avrebbe senso la P « $a \varepsilon$n $. \supset .$ $a = +a$ », di cui è fatto uso esplicito o tacito nei comuni trattati.

([2]) La convenzione comunemente espressa dalla P « $a, b \varepsilon$n $. \supset .$ $ab = a \times b$ », non mi sembra logicamente accettabile, perchè in disaccordo con la convenzione relativa alla rappresentazione dei numeri con cifre; invero, ad esempio, poichè « 2, 3 εn », dovrebb'essere « $23 = 2 \times 3$ ».

Nell'originale invece del simbolo « $\times$ » ho usato il simbolo « . », che qui abbandono per poter adoperare senza ambiguità l'interpunzione logica.

([3]) Questa Hp si riferisce a tutte le P enunciate in questo scritto.

che significa: non è possibile dedurne alcuna dalle altre (precedenti o seguenti).

È noto che per dimostrare l'irriducibilità di un sistema di proposizioni primitive è necessario e sufficiente trovare, per ciascuna Pp, una interpretazione del sistema di idee primitive la quale verifichi tutte le Pp tranne quella considerata [1].

Ciascuna delle seguenti interpretazioni verifica tutte le Pp, tranne quella il cui numero d'ordine è eguale a quello dell'interpretazione stessa [2].

$b\varepsilon - \iota a \,.\, c\varepsilon - (\iota a \cup \iota b) \,.\, d\varepsilon - (\iota a \cup \iota b \cup \iota c) \,.\, e\varepsilon - (\iota a \cup \iota b \cup \iota c \cup \iota d) \,.\supset.$ [3]

1) $\mathrm{n} = \iota a$
$\mathrm{suc}a = b \,.\, \mathrm{suc}b = a$
$\mathrm{sym}a = a \,.\, \mathrm{sym}b = b$

2) n = « numero intero assoluto, 0 incluso »
$x\varepsilon\mathrm{n} \,.\supset_x.\, \mathrm{suc}x = x+1$
$\mathrm{sym}x = -x$

3) $\mathrm{n} = \iota a \cup \iota b \cup \iota c \cup \iota d$
$\mathrm{suc}a = b \,.\, \mathrm{suc}b = c \,.\, \mathrm{suc}c = d \,.\, \mathrm{suc}d = a$
$\mathrm{sym}a = a \,.\, \mathrm{sym}b = d \,.\, \mathrm{sym}c = b \,.\, \mathrm{sym}d = c$

4) $\mathrm{n} = \iota a \cup \iota b \cup \iota c \cup \iota d \cup \iota e$
$\mathrm{suc}a = b \,.\, \mathrm{suc}b = c \,.\, \mathrm{suc}c = d \,.\, \mathrm{suc}d = e \,.\, \mathrm{suc}e = a$
$\mathrm{sym}a = a \,.\, \mathrm{sym}b = d \,.\, \mathrm{sym}c = e \,.\, \mathrm{sym}d = b \,.\, \mathrm{sym}e = c$

5) $\mathrm{n} = \iota a \cup \iota b$
$\mathrm{suc}a = b \,.\, \mathrm{suc}b = a$
$\mathrm{sym}a = b \,.\, \mathrm{sym}b = a$

6) $\mathrm{n} = \iota a \cup \iota b$
$\mathrm{suc}a = b \,.\, \mathrm{suc}b = a$
$\mathrm{sym}a = a \,.\, \mathrm{sym}b = b$

7) $\mathrm{n} = \iota a \cup \iota b \cup \iota c$
$\mathrm{suc}a = a \,.\, \mathrm{suc}b = c \,.\, \mathrm{suc}c = b$
$\mathrm{sym}a = a \,.\, \mathrm{sym}b = c \,.\, \mathrm{sym}c = b$

*
* *

Il sistema di idee primitive è irriducibile, rispetto al sistema di proposizioni primitive; il che significa: non è possibile de-

---

(1) Vedi nell'originale il § 17.

(2) Vedi nell'originale il § 58.

(3) Cioè: « se a, b, c, d, e sono oggetti qualunque, purchè a due a due distinti (non eguali, logicamente) ».

durre dalle Pp alcuna P che definisca nominalmente una delle idee primitive mediante le altre.

Per dimostrare l'irriducibilità di un sistema di idee primitive, rispetto ad un sistema di Pp, è necessario e sufficiente trovare, per ciascuna idea primitiva, una interpretazione del sistema di idee primitive la quale verifichi tutte le Pp, e continui a verificarle tutte, cambiando opportunamente il significato della sola idea primitiva considerata [1].

L'interpretazione

$b \varepsilon - \iota a \,.\, c \varepsilon -(\iota a \cup \iota b) \,.\, e \varepsilon - \iota d \,.\, f \varepsilon -(\iota d \cup \iota e) \,.\supset.$

$\mathrm{n} = \iota a \cup \iota b \cup \iota c$

$\mathrm{suc}a = b \,.\, \mathrm{suc}b = c \,.\, \mathrm{suc}c = a \,.\, \mathrm{suc}d = e \,.\, \mathrm{suc}e = f \,.\, \mathrm{suc}f = d$

$\mathrm{sym}a = a \,.\, \mathrm{sym}b = c \,.\, \mathrm{sym}c = b \,.\, \mathrm{sym}d = d \,.\, \mathrm{sym}e = f \,.\, \mathrm{sym}f = e$

verifica tutte le Pp e continua a verificarle tutte se, invece,

$\mathrm{n} = \iota d \cup \iota e \cup \iota f$

ed anche se, invece,

$\mathrm{suc}a = c \,.\, \mathrm{suc}b = a \,.\, \mathrm{suc}c = b$

ed anche se, invece,

$\mathrm{sym}a = b \,.\, \mathrm{sym}b = a \,.\, \mathrm{sym}c = c$ [2].

***

Dalle Pp 1-7 si deduce

8. $\mathrm{sym}a = \mathrm{sym}b \,.\supset.\, a = b$

[$\mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mathrm{sym}(\mathrm{sym}a) = \mathrm{sym}(\mathrm{sym}b) \,.\, \mathrm{P3} .\supset.\, \mathrm{Ts}$]

9. $\mathrm{sym}a = x \,.\supset.\, a = \mathrm{sym}x$

[$\mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mathrm{sym}(\mathrm{sym}a) = \mathrm{sym}x \,.\, \mathrm{P3} \,.\supset.\, \mathrm{Ts}$]

10. $\mathrm{suc}[\mathrm{sym}(\mathrm{suc}a)] = \mathrm{sym}a$

[$\mathrm{P1.2} \,.\supset.\, \mathrm{suc}[\mathrm{sym}(\mathrm{suc}a)] \,\varepsilon\, \mathrm{n} \,.\mathrm{P4.9} \,.\supset.\, \mathrm{P}$]

11. $\mathrm{suc}\{\mathrm{sym}[\mathrm{suc}(\mathrm{sym}a)]\} = a$

[$\mathrm{P2} \,.\, (\mathrm{sym}a|a)\mathrm{P10} \,.\, \mathrm{P3} \,.\supset.\, \mathrm{P}$]

12. $\mathrm{suc}a = \mathrm{suc}b \,.\supset.\, a = b$

[$\mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mathrm{sym}\{\mathrm{suc}[\mathrm{sym}(\mathrm{suc}u)]\} = \mathrm{sym}\{\mathrm{suc}[\mathrm{sym}(\mathrm{suc}b)]\} \,.\, \mathrm{P4} \,.\supset.\, \mathrm{Ts}$]

.13. $\exists \mathrm{n} \cap x \ni (\mathrm{suc}x = a)$

[$x = \mathrm{sym}[\mathrm{suc}(\mathrm{sym}a)] \,.\supset:$ (1)-(3)

$\mathrm{P1.2} \,.\supset.\, x \varepsilon \mathrm{n}$ (1)

$\mathrm{suc}x = \mathrm{suc}\{\mathrm{sym}[\mathrm{suc}(\mathrm{sym}a)]\}$ (2)

(2). $\mathrm{P11} \,.\supset.\, \mathrm{suc}x = a$ (3)

(1) . (3) $.\supset.$ P]

14. $\mathrm{suc}b = a \,.\, \mathrm{suc}c = a \,.\supset.\, b = c$

[$\mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mathrm{suc}b = \mathrm{suc}c \,.\, \mathrm{P12} \,.\supset.\, \mathrm{Ts}$]

---

(1) Vedi nell'originale il § 16.
(2) Vedi nell'originale il § 57.

*
* *

Poichè, qualunque sia il numero a, esiste uno ed un solo numero il cui successivo è eguale ad a (vedi P13 e 14), si può convenire di rappresentare questo numero con una speciale notazione, ad es. « prec$a$ »; in altri termini, le P13 e 14 giustificano la Df

15. $\text{prec}a = \iota\, [\text{n} \cap x \ni (\text{suc}x = a)]$ Df.

Da quanto precede si deduce:

16. $\text{prec}a\, \varepsilon\, \text{n}$ [P15 .⊃. P]
17. $x = \text{prec}a \;.\supset.\; \text{suc}x = a$ [»]
18. $\text{suc}b = a \;.\supset.\; b = \text{prec}a$ [»]
19. $\text{suc}(\text{prec}a) = a$ [(prec$a$ | x) P17 .⊃. P]
20. $\text{prec}(\text{suc}a) = a$ [P1 . (suc$a$,a) | (a,b) P18 .⊃. P]
21. $\text{prec}a = \text{prec}b \;.\supset.\; a = b$
    [Hp .⊃. suc(prec$a$) = suc(prec$b$) . P19 .⊃. P]
22. $\text{sym}(\text{suc}a) = \text{prec}(\text{sym}a)$
    [x=sym$a$. y= sym(suc$a$) . P1.2.10 .⊃. x,$y\varepsilon$n . suc$y$ =x . P18 .⊃. y= prec$x$.⊃. P]
23. $\text{sym}(\text{prec}a) = \text{suc}(\text{sym}a)$
    [P16 . (prec$a$|a) P10 . P19 .⊃. P]
24. $\text{sym}[\text{suc}(\text{sym}a)] = \text{prec}a$
    [x= sym[suc(sym$a$)] . P1.2.11 .⊃. $x\varepsilon$n . suc$x$ =a . P18 .⊃. x= prec$a$.⊃. P]
25. $\text{sym}[\text{prec}(\text{sym}a)] = \text{suc}a$
    [P2 . (sym$a$|a) P23 . P3 .⊃. P]

*
* *

Poichè esiste uno ed un solo numero eguale al proprio simmetrico (vedi P5 e 6), si può convenire di rappresentare questo numero con un simbolo speciale, ad es. « 0 »; in altri termini, le P5 e 6 giustificano la Df

26. $0 = \iota\, [\text{n} \cap x \ni (\text{sym}x = x)]$ Df

dalla quale si deduce:

27. $0\, \varepsilon\, \text{n}$ [P26 .⊃. P]
28. $\text{sym}0 = 0$ [»]
29. $\text{sym}a = a \;.\supset.\; a = 0$ [»]

Definito così il simbolo « 0 », si può definire il simbolo « 1 »:

30. $1 = \text{suc}0$ Df

ed analogamente si potrebbero definire successivamente i simboli 2, 3, ...

Da quanto precede si deduce:

31. 1εn [P27 . 1 .⊃. suc0εn . P30 .⊃. P]

32. sym1=prec0

[P30 .⊃. sym1 = sym(suc0) . P27.22 .⊃. sym1=prec(sym0) . P28 .⊃. P]

33. sym1 εn [P31.2 .⊃. P]

*
* *

Da quanto precede si deducono le P34, 35, 36, le quali esprimono *tre forme della legge di induzione, estesa al campo dei numeri interi relativi.*

34. 0ε*u* : *x*ε n∩*u* .⊃$_x$. suc*x*,prec*x* ε*u* :⊃. n⊃*u*

[Hp . P27 .⊃. 0εn∩*u* .⊃. Ǝ n∩*u* (1)

Hp .⊃; *x*εn ∩ *u* .⊃$_x$. suc*x*ε*u* (2)

*y*εn . suc*y*ε*u* . P1 .⊃$_y$. suc*y*εn∩*u* . Hp .⊃$_y$. prec(suc*y*)ε*u* . P20 .⊃$_y$. *y*ε*u* (3)

Hp . (1).(2).(3) . P7 .⊃. Ts]

35. 0ε*u* : *x*εn ∩ *u* .⊃$_x$. suc*x*,sym*x*ε*u* :⊃. n⊃*u*

[*x*εn ∩ *u* . P2 . Hp .⊃$_x$. sym*x*εn ∩ *u* . P1 . Hp .⊃$_x$. suc(sym*x*)εn ∩ *u* . Hp .⊃$_x$. sym[suc(sym*x*)]ε*u* . P24 .⊃$_x$. prec*x*ε*u* (1)

Hp . (1) . P34 .⊃. Ts]

36. 0ε*u* : *x*ε n∩*u* .⊃$_x$. prec*x*,sym*x*ε*u* :⊃. n⊃*u*

[*x*εn ∩ *u* . P2.Hp .⊃$_x$. sym*x*εn ∩ *u* . P1.6Hp .⊃$_x$.
prec(sym*x*) εn∩*u* . Hp .⊃$_x$. sym[prec(sym*x*)]ε*u* . P25 .⊃$_x$.suc*x*ε*u* (1)

[Hp.(1) . P34 .⊃. Ts]

*
* *

Ed ora, mediante le P

37. $a+0=a$		
38. $a+$ suc$b=$ suc$(a+b)$		Df
39. $a+$prec$b=$ prec$(a+b)$		

si può definire la notazione « $a+x$ », dove anche x è un « n » qualunque; e precisamente: con la P37, nel caso in cui $x=0$; con la P38, in virtù della P37, nel caso in cui $x>0$; con la P39, in virtù della P37, nel caso in cui $x<0$.

Da quanto precede si deduce:

40. $(a+b)$ εn

[x,$(a+x)$ εn . P1 . 16 .⊃$_x$. x, suc$(a+x)$, prec$(a+x)$ εn . P38.39. ⊃$_x$.
$(a+$suc$x)$, $(a+$prec$x)$ εn (1)

$u=x$∋[$(a+x$ εn] .⊃: (2)-(4)

P37 .⊃. 0ε*u* (2)

*x*ε n ∩ *u* . (1) .⊃$_x$. suc*x*, prec *x* ε*u* (3)

(2) . (3) . P34 .⊃. n⊃*u* (4)

Hp .⊃. *b*εn . (4) .⊃. P]

41. $a+1=$ suc$a$

[P30 .⊃. $a+1=a+$ suc0 . P27.38 .⊃. $a+1=$ suc$(a+0)$. P37 .⊃. P]

42. $a + \text{sym}1 = \text{prec}a$

[P32 .ɔ. $a+\text{sym}1 = a+\text{prec}0$. P27 . 39 .ɔ. $a+\text{sym}1 = \text{prec}(a+0)$. P37 .ɔ. P]

43. $a+c = b+c$.⊃. $a = b$

[$x\varepsilon$n . P40 .ɔ$_x$. $(a+x), (b+x)\ \varepsilon$n (1)

$x\varepsilon$n . $a+\text{suc}x = b+\text{suc}x$. P38 .⊃$_x$.

$\text{suc}(a+x) = \text{suc}(b+x)$. (1) . P12 .⊃$_x$. $a+x = b+x$ (2)

$x\varepsilon$n . $a+\text{prec}x = b+\text{prec}x$. P39 .⊃$_x$.

$\text{prec}(a+x) = \text{prec}(b+x)$. (1) . P21 .⊃$_x$. $a+x = b+x$ (3)

$u = x\ni(a+x = b+x$.⊃$_x$. $a=b)$.⊃: (4)-(6)

P37 .⊃. $0\varepsilon u$ (4)

$x\varepsilon$ n$\frown u$. (2) . (3) .⊃$_x$. suc$x$, prec$x$ εu (5)

(4) . (5) . P34 .⊃. n⊃u (6)

Hp .⊃. $c\varepsilon$n . (6) .⊃. P]

44. $c=d$. $a+c = b+d$.⊃. $a=b$

[Hp .⊃. $d=c$.⊃. $a+d = a+c$. Hp .⊃. $a+d = b+d$. P43 .⊃. Ts]

45. $(a+b)+c = a+(b+c)$

[P40 . P37 .⊃. $(a+b)+0 = a+b$ (1)

P37 .⊃. $b+0=b$.⊃. $a+(b+0) = a+b$ (2)

$x\varepsilon$n . P38 . 39 . 40 .⊃$_x$. (3)-(6)

$(a+b) + \text{suc}x = \text{suc}\,[(a+b)+x\,]$ (3)

$\text{suc}\,[a+(b+x)] = a+\text{suc}\,(b+x) = a+(b+\text{suc}x)$ (4)

$(a+b)+\text{prec}x = \text{prec}\,[\,(a+b)+x\,]$ (5)

$\text{prec}\,[a+(b+x)] = a+\text{prec}\,(a+x) = a+\,(b+\text{prec}x)$ (6)

$u = x\ni\,[(a+b)+x = a+(b+x)]$.⊃: (7)-(10)

(1) . (2) .⊃. $0\varepsilon u$ (7)

$x\varepsilon$ n$\frown u$. (3) . (4) .⊃$_x$. s uc$x\varepsilon u$ (8)

$x\varepsilon$ n$\frown u$. (5) . (6) . ⊃$_x$. prec$x$ εu (9)

(7) . (8) . (9) . P34 .⊃. n⊃u (10)

Hp .⊃. $c\varepsilon$n . (10) .⊃. P]

46. $1+a = \text{suc}a$

[$u = x\ni(1+x = \text{suc}x)$.⊃: (1)-(4)

P31 . 37 .⊃. $1+0 = 1$. P30 .⊃. $0\varepsilon u$ (1)

$x\varepsilon$ n$\frown u$. P31 . 38 .⊃$_x$. $1+\text{suc}x = \text{suc}(1+x) = \text{suc}(\text{suc}x)$.⊃$_x$. suc$x$ εu (2)

$x\varepsilon$ n$\frown u$. P31 . 39 .⊃$_x$. $1+\text{prec}x = \text{prec}(1+x) = \text{prec}(\text{suc}x)$. P20 . 19 .⊃$_x$.

$1+\text{prec}x = \text{suc}(\text{prec}x)$.⊃$_x$. prec$x$ εu (3)

(1) . (2) . (3) . P34 .⊃. n⊃u (4)

Hp .⊃. $a\varepsilon$n . (4) .⊃. P]

47. $(\text{suc}a)+b = \text{suc}(a+b)$

[P41 . P31 . 45 . 46 . 38 .⊃.

$(\text{suc}a)+b = (a+1)+b = a+\,(1+b) = a+\text{suc}b = \text{suc}(a+b)$]

48. $(\text{prec}a)+b = \text{prec}(a+b)$

[P16 . (prec$a$ $|a$) P47 . P19 .⊃. $a+b = \text{suc}\,[(\text{prec}a)+b]$ (1)

$x = a+b$. $y = (\text{prec}a)+b$. P40 . 16 . (1) .⊃.

$x,y\varepsilon$n . suc$y = x$. P18 .⊃. $y = \text{prec}x$.⊃. P]

49. $0+a=a$

[P27 . 31 . 30 . 18 $.\supset.$ $0=$ prec1 $.\supset.$ $0+a=$ (prec1)$+a$. P31 . 48 $.\supset.$
$0+a=$ prec$(1+a)$. P46 $.\supset.$ $0+a=$ prec(suc$a$) . P20 $.\supset.$ P]

50. $a+b=b+a$

[$u=x\varepsilon(a+x=x+a)$ $.\supset:$
P37 . 49 $.\supset.$ $0\varepsilon u$ (1)
$x\varepsilon$ n$\frown u$ $.\supset_x.$ suc$(a+x)=$ suc$(x+a)$. P38 . 47 $.\supset_x.$
$a+$suc$x=$(suc$x$)$+a$ $.\supset_x.$ suc$x$ εu (2)
$x\varepsilon$ n$\frown u$ $.\supset_x.$ prec$(a+x)=$ prec$(x+a)$. P39 . 48 $.\supset_x.$
$a+$prec$x=$(prec$x$) $+a$ $.\supset_x.$ prec$x$ εu (3)
(1) . (2) . (3) . P34 $.\supset.$ n$\supset u$ (4)
Hp $.\supset.$ $b\varepsilon$n . (4) $.\supset.$ P]

51. $a+$sym$b=$ sym [(sym$a$)$+b$]

[P28 . 37 $.\supset.$ $a+$sym0 $=a+0=a$ (1)
P2 . 37 $.\supset.$ sym$a=$ (sym$a$)$+0$. P9 $.\supset.$ $a=$ sym [(sym$a$)$+0$] (2)
$u=x\varepsilon$ $\{a+$sym$x=$ sym [(sim$a$)$+x$]$\}$ $.\supset:$
(1) . (2) $.\supset.$ $0\varepsilon u$ (3)
$x\varepsilon$ n$\frown u$ $.\supset_x.$ prec$(a+$sym$x)=$ prec $\{$sym[(sym$a$)$+x$]$\}$. P2 . 39 $.\supset_x.$
$a+$prec (sym$x$) $=$ . . . . P2 . 40 . 22 $.\supset_x.$
$a+$sym (suc$x$) $=$ sym $\{$suc [(sym$a$)$+x$]$\}$. P2 . 38 $.\supset_x.$
. . . . . . $=$ sym [(sym$a$)$+$(suc$x$)] $.\supset_x.$ suc x εu (4)
$x\varepsilon$ n$\frown u$. [(prec suc, P38 . 23 . 39)|(suc, prec, P39 . 22 . 38)] (4) . $\supset_x.$ prec$x$ εu (5)
(3) . (4) . (5) . P34 $.\supset.$ n$\supset u$ (6)
Hp $.\supset.$ $b\varepsilon$n. (6) $.\supset.$ P]

52. sym$a+$ sym$b=$ sym$(a+b)$

[P2 . (sym$a$|a) P51 . P3 $.\supset.$ P]

53. $a+$ sym$a=0$

[$x=a+$sym$a$. P2 . 40 $.\supset.$ $x\varepsilon$n . P 51 $.\supset.$ $x=$ sym [(sym$a$) $+a$] . P2 . 50
$\supset.$ $x=$ sym$x$. P29 $.\supset.$ $x=0$ $:\supset.$ P]

54. (sym$a$) $+a=0$

[P2 . 40 . 53 $.\supset.$ P]

55. $a+b=0$ $.\supset.$ $b=$ sym$a$

[P50 $.\supset.$ $b+a=0$. P54 $.\supset.$ $b+a=$ (sym$a$)$+a$. P2 . 43 $.\supset.$ Ts]

56. $(a+b)+c=(a+c)+b$

[P45 . 50 $.\supset.$ $(a+b)+c=a+(b+c)=a+(c+b)=(a+c)+b$]

57. $(a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)$

[P40 . 45 . 56 $.\supset.$ $(a+b)+(c+d)=[(a+b)+c]+d=$
$[(a+c)+b]+d=(a+c)+(b+d)$]

*
* *

Ora mediante le P

58. $a\times 0=0$	
59. $a\times$suc$b=a\times b+a$	Df
60. $a\times$prec$b=a\times b+$sym$a$	

si può definire la notazione « $a \times x$ », dove anche x è un « n » qualunque; e precisamente: con la P58, nel caso in cui $x=0$; con la P59, in virtù della P58, nel caso in cui $x>0$; e con la P60, in virtù della P58, nel caso in cui $x<0$.

Da quanto precede si deduce:

61. $(a \times b)\, \varepsilon \mathrm{n}$

[$u = x \ni [(a \times x) \varepsilon \mathrm{n}] . \supset : (1)\text{-}(4)$

$\mathrm{P}27 . 58 . \supset . 0 \varepsilon u$ (1)

$x \varepsilon \mathrm{n} \frown u . \mathrm{P}40 . \supset_x . (a \times x + a)\, \varepsilon \mathrm{n} . \mathrm{P}59 . \supset_x . \mathrm{suc}x\, \varepsilon u$ (2)

$\quad . \quad . \quad . \quad . \mathrm{P}2 . 40 . \supset_x . (a \times x + \mathrm{sym}a)\, \varepsilon \mathrm{n} . \mathrm{P}60 . \supset_x . \mathrm{prec}x\, \varepsilon u$ (3)

$(1) . (2) . (3) . \mathrm{P}34 . \supset . \mathrm{n} \supset u$ (4)

$\mathrm{Hp} . \supset . b \varepsilon \mathrm{n} . (4) . \supset . \mathrm{P}$]

62. $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

[$\mathrm{P}40 . 58 . \supset . (a+b) \times 0 = 0$ (1)

$\mathrm{P}58 . 27 . 37 . \supset . a \times 0 + b \times 0 = 0+0 = 0$ (2)

$x \varepsilon \mathrm{n} . \mathrm{P}40 . 59 . \supset_x . (a+b) \times \mathrm{suc}x = (a+b) \times x + (a+b)$ (3)

$x \varepsilon \mathrm{n} . \mathrm{P}61 . 57 . 59 . \supset_x . (a \times x + b \times x) + (a+b) =$

$\qquad (a \times x + a) + (b \times x + b) = a \times \mathrm{suc}x + b \times \mathrm{suc}x$ (4)

$x \varepsilon \mathrm{n} . \mathrm{P}40 . 60 . 52 . \supset_x . (a+b) \times \mathrm{prec}x = (a+b) \times x + \mathrm{sym}\,(a+b) =$

$\qquad (a+b) \times x + (\mathrm{sym}a + \mathrm{sym}b)$ (5)

$x \varepsilon \mathrm{n} . \mathrm{P}61 . 2 . 57 . 60 . \supset_x . (a \times x + b \times x) + (\mathrm{sym}a + \mathrm{sym}b) =$

$(a \times x + \mathrm{sym}a) + (b \times x + \mathrm{sym}b) = a \times \mathrm{prec}x + b \times \mathrm{prec}x$ (6)

$u = x \ni [(a+b) \times x = a \times x + b \times x\,] . \supset : (7)\text{-}10$

$(1) . (2) . \supset . 0 \varepsilon u$ (7)

$(3) . (4) . \supset . \mathrm{suc}x\, \varepsilon u$ (8)

$(5) . (6) . \supset . \mathrm{prec}x\, \varepsilon u$ (9)

$(7) . (8) . (9) . \mathrm{P}34 . \supset . \mathrm{n} \supset u$ (10)

$\mathrm{Hp} . \supset . c \varepsilon \mathrm{n} . (10) . \supset . \mathrm{P}$]

63. $0 \times a = 0$

[$x \varepsilon \mathrm{n} . \mathrm{P}27 . 62 . 49 . \supset_x . 0 \times a + x \times a = (0+x) \times a = x \times a$ (1)

$x \varepsilon \mathrm{n} . \mathrm{P}61 . 49 . \supset_x . 0 + x \times a = x \times a$ (2)

$x \varepsilon \mathrm{n} . (1) . (2) . \supset_x . 0 \times a + x \times a = 0 + x \times a$ (3)

$\mathrm{P}27 . 61 . 43 . \supset . \mathrm{P}$]

64. $a \times 1 = a$

[$\mathrm{P}30 . 27 . 59 . 58 . 49 . \supset . a \times 1 = a \times \mathrm{suc}0 = a \times 0 + a = 0 + a = a$]

65. $1 \times a = a$

[$u = x \ni (1 \times x = x) . \supset : (1)\text{-}(4)$

$\mathrm{P}31 . 58 . \supset . 0 \varepsilon u$ (1)

$x \varepsilon \mathrm{n} \frown u . \mathrm{P}31 . 59 . 41 . \supset_x . 1 \times \mathrm{suc}x = 1 \times x + 1 = x + 1 = \mathrm{suc}x . \supset_x .$

$\qquad \mathrm{suc}x\, \varepsilon u$ (2)

$x \varepsilon \mathrm{n} \frown u . \mathrm{P}31 . 60 . 42 . \supset_x . 1 \times \mathrm{prec}x = 1 \times x + \mathrm{sym}1 = x + \mathrm{sym}1 =$

$\qquad \mathrm{prec}x . \supset_x . \mathrm{prec}x\, \varepsilon u$ (3)

$(1) . (2) . (3) . \mathrm{P}34 . \supset . \mathrm{n} \supset u$ (4)

$\mathrm{Hp} . \supset . a \varepsilon \mathrm{n} . (4) . \supset . \mathrm{P}$]

66. $(\mathrm{sym}a)\times b = \mathrm{sym}(a\times b)$

[P2 . 62 . 53 . 63 $.\supset.$ $a\times b+(\mathrm{sym}a)\times b = (a+\mathrm{sym}a)\times b = 0\times b = 0$ (1)
P2 . 61 . (1) . P55 $.\supset.$ P]

67. $a\times\mathrm{sym}1 = \mathrm{sym}a$

[P32 . 27 . 60 . 58 . 2 . 49 $.\supset.$ $a\times\mathrm{sym}1 =$
$a\times\mathrm{prec}0 = a\times 0+\mathrm{sym}a = 0+\mathrm{sym}a = \mathrm{sym}a$]

68. $(\mathrm{sym}1)\times a = \mathrm{sym}a$

[P31 . 66 . 65 $.\supset.$ $(\mathrm{sym}1)\times a = \mathrm{sym}\,(1+a) = \mathrm{sym}a$]

69. $a\times b = b\times a$

[$u = x\varepsilon\,(a\times x = x\times a)$ $.\supset:$ (1)-(5)
P58 . 63 $.\supset.$ $0\varepsilon u$ (1)
$x\varepsilon\, n\frown u$. P59 . 65 . 31 . 62 . 41 . $.\supset_x.$
$a\times\mathrm{suc}x = a\times x+a = x\times a+a = x\times a+1\times a = (x+1)\times a = (\mathrm{suc}x)\times a$ (2)
$x\varepsilon\, n\frown u$. P60 . 68 . 33 . 62 . 42 $.\supset_x.$
$a\times\mathrm{prec}x = a\times x+\mathrm{sym}a = x\times a+\mathrm{sym}a = x\times a+(\mathrm{sym}1)\times a =$
$(x+\mathrm{sym}1)\times a = (\mathrm{prec}x)\times a$ (3)
$x\varepsilon\, n\frown u$. (2) . (3) $.\supset_x.$ $\mathrm{suc}x,\ \mathrm{prec}x\ \varepsilon u$ (4)
(1) . (4) . P34 $\supset.$ $n\supset u$ (5)
Hp $.\supset.$ $b\varepsilon n$. (5) $.\supset.$ P]

70. $a\times\mathrm{sym}b = \mathrm{sym}(a\times b)$

[P2 . 69 . 66 . 69 $.\supset.$ $a\times\mathrm{sym}b = (\mathrm{sym}b)\times a = \mathrm{sym}\,(b\times a) = \mathrm{sym}\,(a\times b)$]

71. $(\mathrm{sym}a)\times(\mathrm{sym}a) = a\times b$

[P2. $(\mathrm{sym}b|b)$ P66 . P70 . 61 . 3 $.\supset.$
$(\mathrm{sym}a)\times(\mathrm{sym}b) = \mathrm{sym}(a\times\mathrm{sym}b) = \mathrm{sym}\,[\mathrm{sym}(a\times b)] = a\times b$]

72. $c\times(a+b) = c\times a+c\times b$

[P40 . 69 . 62 . 69$.\supset.$ P]

73. $(a+b)\times(c+d) = (a\times c+a\times d)+(b\times c+b\times d)$

[P40 . 62 . 72 $.\supset.$ P]

74. $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$

[$u = x\varepsilon\,[(a\times b)\times x = a\times(b\times x)]$ $.\supset:$ (1)-(4)
P61 . 58 $.\supset.$ $(a\times b)\times 0 = 0$. $a\times(b\times 0) = a\times 0 = 0$ $.\supset.$ $0\varepsilon u$ (1)
$x\varepsilon\, n\frown u$. P61 . 59 . 72 . 59$.\supset_x.$ $(a\times b)\times\mathrm{suc}x = (a\times b)\times x + a\times b =$
$a\times(b\times x) + a\times b = a\times[b\times x+b] = a\times(b\times\mathrm{suc}x)$ $.\supset_x.$ $\mathrm{suc}x\ \varepsilon u$ (2)
$x\varepsilon\, n\frown u$. P61 · 70 $.\supset_x.$ $(a\times b)\times\mathrm{sym}x = \mathrm{sym}\,[(a\times b)\times x] =$
$\mathrm{sym}\,[a\times(b\times x)] = a\times\mathrm{sym}\,(b\times x) = a\times(b\times\mathrm{sym}x)$ $.\supset_x.$ $\mathrm{sym}x\ \varepsilon u$ (3)
(1) . (2) . (3) . P35 $.\supset.$ $n\supset u$ (4)
Hp $.\supset.$ $c\varepsilon n$. (4) $.\supset.$ P]

***

Per ultimo, assumiamo quale Df della notazione « $a-b$ » la P Df

75. $a-b = a+\mathrm{sym}b$

Da quanto precede si deduce:

76. $(a-b)\ \varepsilon\, \mathrm{n}$

[P2 . 40 . 75 $.\supset.$ P]

77. $(a+b)-b=a$

[P40 . 75 . 2 . 45 . 53 . 37 $.\supset.$
$(a+b)-b=(a+b)+\mathrm{sym}b=a+(b+\mathrm{sym}b)=a+0=a$]

78. $(a-b)+b=a$

[P75 . 2 . 45 . 54 . 37 $.\supset.$
$(a-b)+b=(a+\mathrm{sym}b)+b=a+(\mathrm{sym}b+b)=a+0=a$]

79. $a-b=\mathrm{sym}(b-a)$

[P75 . 51 . 2 . 50 . 75 $.\supset.$
$a-b=a+\mathrm{sym}b=\mathrm{sym}[(\mathrm{sym}a)+b]=\mathrm{sym}(b+\mathrm{sym}a)=\mathrm{sym}(b-a)$]

80. $a-(a-b)=b$

[P76 . 75 . 79 . 76 . 50 . 78 $.\supset.$
$a-(a-b)=a+\mathrm{sym}(a-b)=a+(b-a)=(b-a)+a=b$]

81. $a+b=c\ .\supset.\ c-b=a$

[Hp $.\supset.$ $c-b=(a+b)-b$. P77 $.\supset.$ Ts]

82. $c-b=a\ .\supset.\ a+b=c$

[Hp $.\supset.$ $a+b=(c-b)+b$. P78 $.\supset.$ Ts]

83. $a-a=0$

[P75 . 53 $.\supset.$ $a-a=a+\mathrm{sym}a=0$]
$\cup$ [P27 . 49 . 81 $.\supset.$ P]

84. $a-0=a$

[P27 . 75 . 28 . 37 $.\supset.$ $a-0=a+\mathrm{sym}0=a+0=a$]
$\cup$ [P27 . 37 . 81 $.\supset.$ P]

85. $0-a=\mathrm{sym}a$

[P27 . 79 . 84 $.\supset.$ $0-a=\mathrm{sym}(a-0)=\mathrm{sym}a$]
$\cup$ [P27 . 2 . 54 . 81 $.\supset.$ P]

86. $a-1=\mathrm{prec}a$

[P31 . 75 . 42 $.\supset.$ $a-1=a+\mathrm{sym}1=\mathrm{prec}a$]

87. $a-\mathrm{sym}b=a+b$

[P2 . 75 . 3 $.\supset.$ P]

88. $a-(b+c)=(a-b)-c$

[P40 . 75 . 52 . 2 . 45 . 75 . 76 . 75 $.\supset.$
$a-(b+c)=a+\mathrm{sym}(b+c)=a+(\mathrm{sym}b+\mathrm{sym}c)=(a+\mathrm{sym}b)+\mathrm{sym}c=$
$(a-b)+\mathrm{sym}c=(a-b)-c$]

89. $a+(b-c)=(a+b)-c$

[P75 . 2 . 45 . 40 . 75 $.\supset.$
$a+(b-c)=a+(b+\mathrm{sym}c)=(a+b)+\mathrm{sym}c=(a+b)-c$]

90. $a-(b-c)=(a-b)+c$

[P2 . $(\mathrm{sym}c|c)$ P88 . P75 . 76 . 87 $.\supset.$ P]

91. $(a+c)-(b+c)=a-b$

[P50 . 40 . 88 . 77 $.\supset.$ $(a+c)-(b+c)=(a+c)-(c+b)=$
$[(a+c)-c]-b=a-b$]

92. $(a-c)-(b-c)=a-b$

[P2 . (symc|c) P91 . P75 .⊃. P]

93. $(a-b)\times c = a\times c - b\times c$

[P75 . 2 . 62 . 66 . 61 . 75 .⊃.

$(a-b)\times c=(a+\text{sym}b)\times c=a\times c+(\text{sym}b)\times c=a\times c+\text{sym}(b\times c)= a\times c-b\times c$]

94. $c\times(a-b)=c\times a-c\times b$

[P76 . 69 . 93 . 69 .⊃. P]

95. $(a+b)\times(c-d)=(a\times c+b\times c)-(a\times d+b\times d)$

[P40 . 94 .⊃. $(a+b)\times(c-d)=(a+b)\times c-(a+b)\times d$. P62 .⊃. P]

96. $(a-b)\times(c+d)=(a\times c+a\times d)-(b\times c+b\times d)$

[P40 . 93 .⊃. $(a-b)\times(c+d)=a\times(c+d)-b\times(c+d)$. P72.⊃.P]

97. $(a-b)\times(c-d)=(a\times c+b\times d)-(b\times c+a\times d)$

[P76 . 93 . 94 .⊃. $(a-b)\times(c-d)=a\times(c-d)-b\times(c-d)= (a\times c-a\times d)-(b\times c-b\times d)$ (1)

(1) . P61 . 91 .⊃. . . $=[(a\times c+b\times d)-(a\times d+b\times d)]- [(b\times c+a\times d)-(b\times d+a\times d)]$ (2)

(2) . P61 . 40 . 50 . 92 .⊃. P]

Roma, 20 aprile 1901.

International Association for promoting the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics.

RULES AND REGULATIONS.

Name and Object.

The name of the association shall be « International Association for Promoting the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics. »

Its objects shall be to further in every way possible the study of the calculus of vectors and related quantities.

. . . .

Membership and Fees.

Any one may become a member on his own application, accompanied by fees of the current year to the National Secretary, or to the General Secretary when there is no National Secretary in his country.

A member may resign his membership by letter to the National Secretary or to the General Secretary.

The annual fees of a member shall be twelve francs or its equivalent.

Any one of special merit to the object of the association, may be elected as an Honorary Member or as an Honorary Officer.

. . . .

National Secretary, Italy : Giuseppe Peano, Professore nella R. Università di Torino. (Voir RdM t. 5 a. 1895 p.168).

ADDITIONS ET CORRECTIONS AU FORMULAIRE a.1901

par

E. Cantoni
C. Ciamberlini, abrégé en (c
G. Eneström
A. Padoa » (pd
G. Peano » (p
A. Ramorino
O. Stolz
G. Vacca » (v

add. indique cette série d'additions.

LOGIQUE

§Ↄ p.13 ligne 10. Au lieu de Oper $x\mathfrak{z}$ lisez Oper $x\varepsilon$. (p

P5·1 note.

Le mot «distributif» a été introduit par Servois Ann. t.5 a.1815 p.98, vaec la signification expliquée dans §lin P1·0 note. Sa valeur est ici généralisée. (p

P6·2 (p.14).

Le mot «commutatif» a été introduit par Servois a.1815, dans la signification expliquée dans §– P1·5. (p

7·13 $a,b,c\varepsilon$Cls . aↃb .Ↄ: cↃa .Ↄ. cↃb [= Syll]
Ex. §Lm P4·6 add. Dem. (p

p.16 P8·1 note ligne 4. Au lieu de $x\varepsilon$ lisez $x\mathfrak{z}$. (p

§∧ p.23 P2·6. Après Hauber au lieu de 1829 lisez 1825. (Stolz

§– P1·5 (p.25) note.

Servois a.1815 Ann.t.5 p.98:

«Soit $ffz = ffz$. Les fonctions qui comme f et f seront appelées *commutatives entre elles.*» (p

§sim p.37 ligne 9. Au lieu de §π lisez §Π. (p

§15 p.38.

On rencontre cette notation u^{-1} dans Servois a.1815 Ann. t.5 p.93. (p

ARITHMÉTIQUE

§+ p.39. Portez les P4·0·1·2 en avant des P2.

En effet dans la P2 on considère le successif de 0, 1,... dont l'existence est donnée par les P4·0·1·2. (c

p.40. Après ✱ lisez 3 (dans quelques copies). (c

§+ 4·3. Le principe d'induction, quoique non énoncé d'une manière générale, avait déjà été employé explicitement par *Maurolycus* a.1556, dans son ouvrage : *Arithmeticorum libri duo*, Venetiis, a.1575.

En effet dans plusieurs démonstrations cet auteur (p. 7, 17, 30, ...) après avoir démontré que l'énoncé, étant vérifié pour un nombre, est aussi verifié pour le suivant, l'ayant verifié pour les premiers nombres, il en conclut : « et eodem syllogismo pro quovis alio assignato loco utemur ad roborationem propositi. » (pag.30). Ou plus clairement : (pag.7) « ... et sic deinceps in infinitum semper (propositione) repetita propositum demonstratur ». (v

8·41 $s\varepsilon \mathrm{Cls} : x\varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset_x . x\varepsilon s . \cup . x = \Lambda :\supset: a\varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . a+ \varepsilon s$ [= P.4]

Cette forme, plus compliquée, de la P·4 a l'avantage de ne plus contenir le symbole - de la négation : elle se rapproche beaucoup du principe d'induction (§+ P4·3) qui dit :

$$s\varepsilon \mathrm{Cls} . 0\varepsilon s : x\varepsilon s . \supset_x . x+ \varepsilon s :\supset: a\varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . a\varepsilon s$$ (v

§+ 10·9 note (p.46).

On rencontre aussi les puissances des fonctions dans Servois Ann. t.5 p.93 a.1815 (présentée a.1812). (p

§× (p.51) P1·3 Dem, ligne 2. Au lieu de $a(b+1)$ lisez $a(b+c)$ (p
» » P1·31 Dem, ligne 2. » $a(+b)$ » $(a+b)$ (p

8·2 (p.53) Dem [$(a-d, b-d, c-d) \mid (a,b,c)$ P8·1 .⊃. P] (c
8·3 (p.53) Au lieu de = lisez = — (c
8·4 (p.53) Dem [[$3a-b-c, 3b-c-a, 3c-a-b) \mid (a,b,c)$ P8·3 .⊃. P] (c
8·4 (p.53) Au lieu de = lisez = — (c

§/ (p.54) note ligne 11. Après « Oughtred » lisez a.1631. (p

(p.55) *Note sur les fractions.*

La P4·1 $a,b,c,d\varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset: a/b = c/d .=. ad = bc$

a été prise pour définition par MM. :

Stolz : *Vorlesungen über allg. Arithmetik,* a.1855 p.43 ;

J. Tannery : *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable,* a.1886 p. VIII, et plus explicitement :

— *Leçons d'Arithmétique*, a.1894 p.148 ;

L. Couturat : *De l'infini mathématique,* a.1896 p.1.

Alors la fraction a/b est introduite « par abstraction » ; on ne pose pas

$(a/b) =$ (expression composée par les idées précédentes),

mais on définit seulement par les idées précédentes l'égalité $a/b = c/d$.

Nous préférons considérer a/b comme représentant la double opération $\times a\ /b$, c'est-à-dire « multiplier par a et diviser par b ». Les deux opérateurs a/b et c/d sont égaux, lorsque, appliqués à un même nombre qui rende possibles les deux opérations, ils donnent des résultats égaux. (P3·2).

Nous avons donné cette Df P3·2 dans F1889 p.13; voir RdM. t.1 p.262.

Cette façon de considérer les fractions comme des opérations, se trouve aussi dans les : *Leçons sur l'analyse infinitésimale*, a.1894 p.2, par M. Méray, qui l'avait déjà publiée dans les AnnN. a.1889 p.421.

Il dit : « On convient de représenter le résultat de l'opération composée « consistant à multiplier un entier donné E par un second nombre n, puis « à diviser le produit par un troisième d, par le signe $E \times \frac{n}{d}$,... en lui laissant le nom de produit du nombre E par le facteur fictif $\frac{n}{d}$. Ces facteurs « fictifs, dont les combinaisons sont soumises à un ensemble de règles que « nous allons exposer rapidement, sont précisément les nombres fractionnaires ou fractions.

« Si la comparaison des produits des deux fractions $\frac{n'}{d'}, \frac{n''}{d''}$ par un seul « entier E non $= 0$ donne lieu à l'une des relations $E\frac{n'}{d'} \gtreqless E\frac{n'}{d'}$ la même « relation aura lieu entre les produits des mêmes fractions par tout autre « entier..., pourvu que ces multiplications fictives soient toutes exécutables.

« On exprime cette corrélation constante en disant que la valeur de la première est supérieure, égale ou inférieure à celle de la seconde. »

Cette idée est la plus naturelle. Dans le papyrus Rhind, du calculateur égyptien Ahmès (a.—2000 environ), on trouve (colonne 12) :

« 1—(2/3+/15) = /5+/15

En effet, en opérant sur 15 on a :

15—10—1 = 3+1 ».

En suivant l'A. nous n'avons pas écrit le numérateur lorsqu'il est l'unité, mais nous avons remplacé les chiffres égyptiens par les actuels. (p

§ /P7·0 note.

On rencontre la fonction $/a$ sous la forme ꝗa dans Hamilton IrishT. t.17. (v

§↑ (p.60) *Note sur les puissances.*

Puissance = potentia, est la version de *δύναμις* (Diophantus), qui signifiait « carré ». (p

§↑ 4·3 (p.62) On peut lire N_1 à la place de N_0. (c

§↑ 6·0 — La première démonstration connue de ce théorème est due à Euler PetrNC. t.8 a.1760-61 p.105. Cette démonstration est tout à fait rigoureuse. Au contraire la démonstration, qu'on cite habituellement de, ses *Elém. d'Algébre* (a.1770) est incomplète. (v

§ 6·1 *Note* — Kummer, a.1857, BerlinAbh. p.41, a étendu sa démonstration à d'autres classes de nombres premiers. Il resulte de son analyse la dém. du théorème de Fermat lorsque $n\varepsilon$ 1···100. (v

§ P6·0-·4. On peut écrire plus simplement ces P ainsi :

·0 $N_1^3+N_1^3 \supset N_1-N_1^3$ ·1 $n\varepsilon N_0+3 .\supset. N_1^n+N_1^n \supset N_1-N_1^n$ ...

Les avantages de cette substitution sont indiqués dans la §- 3·8n. (v

§ P9·03 (p.64) Dem. au lieu de P·04 lisez P·01. (c

9·07 (p.64). Dem [$3(a^4+a^2b^2+b^4)-(a^2+ab+b^2)^2 = 2(a-b)^2(a^2+ab+b^2)>0$] (c

9·08 (p.64). Dem [$2(a^4+a^2b^2+b^4)-3ab(a^2+b^2) = (a-b)^2(2a^2+ab+2b^2)>0$] (c

§ 9·09 il faut lire cette P ainsi :

$$4(a^2+ab+b^2)^3 > 27(a^2b+ab^2)^2$$

La démonstration suivante est due à Lagrange, Œuvres t.4 p.346, a.1777 :

[$4(a^2+ab+b^2)^3 - 27(a^2b+ab^2)^2 = (a-b)^2[2(a^2+ab+b^2)+3ab]^2$] (v

9·091 $27(a^3+a^2b+ab^2+b^3)^4 > 256a^2b^2(a^2+ab+b^2)^3$ (v

9·11 (p.64). Au lieu de $\geqq$ lisez $>$. (c

9·13 (p.64). Cette P subsiste dans l'Hp plus générale $a\leqq b\leqq c$. $a+b>c$. (c

9·20 Dem 2.

[$2(a^3+b^3+c^3-3abc) = (a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$] (v

9·24 Dem 2. [$2[(a+b+c)^3-27abc] =$
$(a-b)^2(a+b+7c)+(b-c)^2(7a+b+c)+(c-a)^2(a+7b+c)$.] (v

9·30 (p.64). Dem [$(bc,ca,ab) \mid (a,b,c)$ P·12 $.\supset.$ P] (c

9·31 (p.64). Dem[$(a^2,b^2,c^2) \mid (a,b,c)$P·11 $.\supset.$ $a^4+b^4+c^4 > a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$ (1)
$(ab,ac,bc) \mid (a,b,c)$P·11 $.\supset.$ $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 > abc(a+b+c)$ (2)
(1) . (2) $.\supset.$ P] (c

9·32 (p.65). Au lieu de $\geqq$ lisez $>$. (c

9·32 (p.65). Dem [$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-(a^2+b^2+c^2)^2 =$
$ab(a-b)^2+ac(a-c)^2+bc(b-c)^2 >0$] (c

9·42 (p·65). Dem [P9·41 $.\supset.$ P] (c

9·43 (p.65). Dem [P9·42 $.\supset.$ P] (c

9·51 (p.65). Dem [P14·41 $.\supset.$ P] (c

9·30·42·43 { MacLaurin a.1726 LondonT. t.34 p.109, 104, 112 }

·44 $a,b,c,d\varepsilon N_1 . -(ad = bc) .\supset. (a^3d^3+b^3c^3)(c+d)^3 > (a+b)^3c^3d^3$ (v

14·03 — Cette P, sous la forme : $ab = (a+b)^2/4 - (a-b)^2/4$, réduit toute multiplication à deux additions et une subtraction, si l'on a une table des quarts des carrés. Cette méthode est plus commode que celle des logarithmes lorsque on n'a que deux nombres à multiplier, et lorsque

on désire avoir tous les chiffres du produit. Une table des quarts des carrés des nombres 1···200 000 donne tous les produits de deux nombres de 5 chiffres (Voir J. Blater, Table des quarts de carrés de tous les nombres entiers jusqu'à 200 000, etc. Paris, a.1888). Lorsque $a+b$ surpasse la limite de la table on peut encore utiliser parfois la formule: $ab = [a^2+b^2-(a-b)^2]/2$.

On peut aussi utiliser les formules:

$$ab = (a+b)(a+b+1)/2 - a(a+1)/2 - b(b+1)/2$$
$$ab = a(a+1)/2 + b(b-1)/2 - (a-b)(a-b+1)/2$$

qui exigent l'emploi d'une table des nombres triangulaires $n(n+1)/2$. (Arnaudeau, Table des triangulaires de 1 à 100 000, etc. Paris a.1896). (v

§N 14·04 (p.65). Dem [$(b-c, c-a, a-b) \mid (a,b,c)$ P3·1 .⊃. P] (c

14·07 (p.65). Dem [$(2b+2c-a, 2c+2a-b, 2a+2b-c) \mid (a,b,c)$ P14·05 .⊃. P] (c

14·121 (p.66). Cette P n'est pas exacte. (c

14·122 (p·66). Dem [$(b+c, c+a, a+b) \mid (a,b,c)$ P·11 .⊃. P] (c

14·13 (p.66). Dem [$(b+c-a, c+a-b, a+b-c) \mid (a,b,c)$P3·3 .⊃. P] (c

14·14 (p·66). Dem [P3·3 .⊃. P] (c

14·17 (p.66). Dem [$(b-c, c-a, a-b) \mid (a,b,c)$ P3·3 .⊃. P] (c

14·35 (p.66). Dem [P·33 .⊃. P] (c

14·36 (p.66). Dem [$(b+c, c+a, a+b) \mid (a,b,c)$ P·31 .⊃. P] (c

14·38 $(a+b+c)^4 + (-a+b+c)^4 + (a-b-c)^4 + (a+b-c)^4 = 4(a^4+b^4+c^4) + 24(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$ (v

14·7 (p·67). Dem [$(bc, ca, ab) \mid (a,b,c)$ P·37 .⊃. P] (c

14·72 (p.67). Dem [$(b+c-a, c+a-b, a+b-c) \mid (a,b,c)$ P3·9 .⊃. P] (c

14·73 (p.67). Au lieu de $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$ il faut lire: $2[(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5]$ (c

14·73 (p.67). Dem [$(b-c, c-a, a-b) \mid (a,b,c)$ P·72 .⊃. P] (c

14·91 (p.68). Dem [P·9 .⊃. P] (c

15·5 (p.68). Au lieu de $3^{3n-3}+7^n \times 2^{3n-1} \varepsilon 29N_1$ il faut lire: $3^{3n}+7^{n+1} \times 2^{3n+2} \varepsilon 29N_1$. (c

Au lieu de $992N_1$ il faut lire $992N_0$. (c

§··· ·01 $a \varepsilon n \,.\, b \varepsilon a+N_0 \,.\supset.\, a\cdots b = (b-N_0) \frown (a-N_1)$ Dfp

$= (a+N_0) \frown (b-N_0)$ Dfp

·02 » $.\supset.\, -(a\cdots b) = (-b)\cdots(-a)$

·21 $a,b \varepsilon n \,.\, c \varepsilon a+N_0 \,.\, d \varepsilon b+N_0 \,.\supset.\, (a\cdots c)-(b\cdots d) = (a-d)\cdots(c-b)$ [P2·02 .⊃. P]

·4 $a \lesseqgtr b \,.=.\, a \varepsilon 0\cdots b$ Dfp (pd

§···

Il y a peut-être avantage à porter ce § avant le §≤.

Entre autres, j'observe qu'on fait ainsi disparaître les symboles de logique (ꓱ,-) des P qui suivent; voici comment on peut exécuter ce déplacement:

§···

·0 $0\cdots0 = \iota 0$] Df

·01 $a\varepsilon N_0 . \supset . 0\cdots(a+1) = (0\cdots a) \cup \iota(a+1)$

·1 —— $. \supset . 0\cdots a = \iota 0 .=. a=0$

·2 $a,b\varepsilon N_0 . \supset : 0\cdots a = 0\cdots b .=. a=b$

§≤

$a,b,c\varepsilon N_0 . \supset :$

·0 $a \leq b .=. 0\cdots a \supset 0\cdots b$ Df

·1 $0 \leq a . a \leq a$

·2 $a \leq b . b \leq a . \supset . a=b$ [Df≤ . §1 6·0 .⊃. P]

·3 $a \leq b . b \leq c . \supset . a \leq c$ [Df≤ . Syll .⊃. P]

(v

§Num

·25 $\mathrm{Num}(\iota x) = 1$

·26 $a\varepsilon \mathrm{Cls} . \supset :: \mathrm{Num}\, a\varepsilon N_0 .=.\cdot. -ꓱa .\cup: x\varepsilon a . \supset_x .$
$\mathrm{Num}(a-\iota x) -= \mathrm{Num}\, a$ (pd

·49 $a\varepsilon \mathrm{Cls} . \mathrm{Num}\, a\, \varepsilon N_0 . \supset . (aFa)\mathrm{sim} = (aFa)\mathrm{rep}$ (p

·57 $a\varepsilon \mathrm{Cls} . \supset : \mathrm{Num}\, a\ \varepsilon\ \mathrm{infn} .=. 1+\mathrm{Num}\, a = \mathrm{Num}\, a$ Dfp (v

·82 { Jones a.1706 *Synopsis palmar. mathescos* Londini p.217:
« Generally N^n is the composition of n quantities in N ». } (v

§Σ P1·0 (p.73). Au lieu de $1\cdots(m+1)$ lisez $0\cdots(m+1)$. (p

§Σ 2·5 $n\varepsilon N_1 . f,g\varepsilon \mathrm{rf}0\cdots n . \supset . \Sigma[gx\times\Sigma(f, 0\cdots x) | x, 0\cdots n] +$
$\Sigma[fx\times\Sigma(g, 0\cdots x) | x, 0\cdots n] = \Sigma(f, 0\cdots n)\times\Sigma(g, 0\cdots n)$ (v

§Σ 3·3 Dem

[Hp .⊃. $3\Sigma[r(r+1) | r, 1\cdots n] = 3\Sigma[(r+1)(r+2) | r, 0\cdots(n-1)]$
$= \Sigma\{[(r+1)(r+2)(r+3) - r(r+1)(r+2)] | r, 0\cdots(n-1)\}$
$= n(n+1)(n+2)$.⊃. P] (v

4·12 Dem.

[$s_2 = \Sigma(r^2 | r, 1\cdots n) = \Sigma[r(r+1)-r | r, 1\cdots n]$
$= \Sigma[r(r+1) | r, 1\cdots n] - \Sigma(\mathrm{idem}, 1\cdots n)$ (1)

(1) . P3·3 . P3·1 .⊃. $s_2 = n(n+1)(n+2)/3 - n(n+1)/2$
$= n(n+1)(2n+1)/6$.⊃. P]

4·13 Dem. [$r\varepsilon N_1 . \supset . r^3 = (r-1)r(r+1) + r$. P3·1·4 .⊃. P] (v

§Σ4·1 (p.74) Dans la formule de s_3 supprimez la citation de Nicomachus.
Le passage cité de Nikomachos ne contient *rien* sur la sommation des cubes, mais seulement une décomposition des nombres cubiques, d'où l'on *peut* déduire aisément s_3 *si* l'on connaît la *formule générale* de la décomposition de n^3, qui manque chez Nikomachos. G. Eneström.

4·2. Au lieu de s lisez s_1. (c

4·2 $9s_2^2 = s_1^2(8s_1+1)$ $3s_5 = s_1^2(4s_1-1)$ $s_5 = 4s_1^3-3s_2^2$

$7s_6 = s_2(12s_1^2-6s_1-1)$ $3s_7 = s_1^2(6s_1^2-4s_1+1)$

$s_7 = 2s_1^3(s_1-2)+3s_2^2$ $3s_8 = 8s_1^2s_2(s_1-1)+3s_4$

$5s_9 = 16s_6^4(s_1-1)+12s_5 = 4s_1^2[4s_1^2(s_1-1)+4s_1-1]$

$11s_{10} = 4s_1^2s_2(12s_1^2-20s_1+17)-25s_4 = s_2(48s_1^4-80s_1^3+68s_1^2-30s_1+5)$

$33s_{10} = 4s_1^2s_2(36s_1^2-10s_1+1)-75s_8$

$3s_{11} = 16s_1^6-32s_1^5+34s_1^4-15s_5 = s_1^2(16s_1^4-32s_1^3+34s_1^2-20s_1+5)$

$12s_{11} = 8s_1^4(8s_1^2-6s_1+7)-25s_9$ (pd

5·1 (p.75). Au lieu de $(2m+3)$ lisez: $(2m+3)/3$. (c

6·1 (p.75). À l'Hp ajoutez $a-=b$. (c

10. On donne ici la Df symbolique de notre système de numération; mais dans les P précédentes (p.60, etc.), on trouve plusieurs fois des nombres écrits dans le système décimal. (c

10. *Note.* — (p.77). Au lieu des lignes 11-14 lisez:

Colson (LondonT. a.1726 t.34 p.161-174), suivi par Cauchy (Œuvres s.1 t.5 p.434-455), sans changer la base du système de numération, par l'introduction des chiffres négatifs a reduit de moitié le nombre des chiffres.

Dans ce système: $6=1\bar{4}$, $87 = 1\bar{1}\bar{3}$, $1901 = 2\bar{1}01$ etc.

On adopte aujourd'hui la notation des chiffres négatifs pour indiquer la caractéristique négative des logarithmes. (v

(p.78) ligne 5, ajoutez:

On peut adopter les bandes de papier proposées par Colson a.1726, pour la multiplication abrégée, dans son système de numération.

C'est-à-dire, pour multiplier 123 par 456 on écrit ce dernier nombre sur une bande de papier, en renversant l'ordre des chiffres 654; on porte le 6 au dessous du 3, et on les multiplie; on a des unités. Puis on porte le 6 au dessous du 2, et en conséquence le 5 au dessous du 3, et on multiplie les chiffres correspondants: la somme de ces produits représente des dizaines. On donne à la bande un mouvement d'une place à gauche; on multiplie les chiffres correspondants; la somme de ces produits représente des centaines; et ainsi de suite. (v

20·6 $(n-1)(\Sigma x^2) \gtreqless 2\Sigma[x_r x_s \mid (r,s),(1\cdots n:1\cdots n)\frown(r,s)\ni(r<s)]$

·7 $(n-1)(\Sigma x)^2 \gtreqless 2n\Sigma[$ » » » » $]$

{ ·6·7 MacLaurin a.1726 LondonT. t.34 p.112 } (v

§Π 4·3 $n \varepsilon N_1 . a,b \varepsilon r F 1 \cdots n . \supset . \Pi[(a_r + b_r)|r, 1\cdots n] =$
$\Sigma[\Pi(a,u) \times \Pi(b, 1\cdots n - u) | u, Cls' 1\cdots n]$ (p

·4 $\Pi[(x+a_r)|r, 1\cdots n] = \Sigma\{x^r \Sigma[\Pi(a,u) | u, Cls' 1\cdots n \frown u \ni (Num u = r] | r, 0\cdots n\}$ (p

·5 $m,n \varepsilon N_1 . a \varepsilon Rf(1\cdots m \,\dot{:}\, 1\cdots n) . \supset .$
$\Pi\{\Sigma[a(r,s)|s, 1\cdots n] | r, 1\cdots m\} = \Sigma\{\Pi[a(r, u_r)|r, 1\cdots m] | n, 1\cdots n F 1\cdots m\}$
(p

§! 1·2 $n \varepsilon N_1 . \supset . (n!)^2 \geqq n^n . n! \leqq [(n+1)/2]^n$ [§Π 10·1 $. \supset .$ P] (v

·21 $n \varepsilon N_1 . a \varepsilon N_0 F 1\cdots n . \supset . (\Sigma a)! \varepsilon N_1 \times \Pi(a!)$ (p

4·3 $n \varepsilon N_1 . m \varepsilon n + N_0 . \supset . Num(1\cdots m F 1\cdots n) sim = m!/(m-n)!$ (v

Les objets dont on prend ici le nombre, s'appellent *arrangements* de *m* objets pris *n* à *n*. (v

5·4 $r,m,n \varepsilon N_1 . \supset . n^{r+1} \Pi[m+(0\cdots r)n] / (r+1)! \varepsilon N_1$ (v

6·3 (p.82) Au lieu de Ths ·3 lisez Ths ·2. Ajoutez:
{ VANDERMONDE ParisM. a.1772 } (p

6·6 $a \varepsilon r . n \varepsilon N_1 . \supset . \Sigma\{(-1)^r C(a,r) | r, 0\cdots n\} = (-1)^n C(a-1, n-1)$

7·4 Dem [P6·2 . $m=n=k . \supset .$ P] (p

7. Au lieu de la ·5 lisez:

7·5 $\Sigma\{(-1)^r [C(2n,r)]^2 | r, 0\cdots 2n\} = (-1)^n C(2n,n)$
{CESÀRO a.1884 Mathesis t.4 p.231} (v

7·71 $a,b \varepsilon r . m,n \varepsilon N_1 . m < n . \supset . \Sigma\{(-1)^r C(n,r)(a+rb)^m | r, 0\cdots n\} = 0$
{ EULER a.1743 CorrM. t.1 p.264 } (v

7·9 $n \varepsilon N_1 . \supset . \Sigma\{(-1)^{r+1} C(n,r)/(n+r) | r, 1\cdots n\} = / [(2n+1) C(2n,n)]$
{WALLIS a.1655 p.425:

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1.2}{3.4.5}, \frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1.2.3}{4.5.6.7}$

... et sic deinceps ... } (v

7·91 $m,n \varepsilon N_1 . \supset . \Sigma[(-1)^r C(n,r)/(m+r) | r, 0\cdots n] = n!/\Pi(m+0\cdots n)$
(p

8. Ajoutez: { JONES a.1706 p.172 } (v

§max p. 85.

On suppose implicitement ici qu'en posant, par définition, $x = \imath u$, on puisse déduire $\iota x = u$. Cette convention est contraire à §ι P·8. Il convient donc de remplacer $\exists \iota$ max u par max $u \varepsilon N_0$. (p

§max ·01 max$u = \imath u \frown x \ni (u \supset 0\cdots x)$	Dfp	
» » » » $(u \supset x - N_0)$	Dfp	
» » » » $(-\exists u \frown N_1 + x)$	Dfp	(pd

§quot rest (p.87). Ajoutez:

·91 $a \geqq b \,.\supset.\, \mathrm{quot}[a,\mathrm{quot}(a,b)] = b + \mathrm{quot}[\mathrm{rest}(a,b),\, \mathrm{quot}(a,b)]$
——— $\mathrm{rest}[a,\, \mathrm{quot}(a,b)] = \mathrm{rest}\, [\mathrm{rest}(a,b),\, \mathrm{quot}(a,b)]$ (c

§E (p.88) P2·4, P3·7. Changez l'Hp en $a\varepsilon N_0 \,.\, b\varepsilon N_1$. (c

§Chf (p.89) P·2. On peut lire N_0 au lieu de N_1. (c

§Dvr 2·11 Dem. Au lieu de P2 lisez P3 (p

2·12 (p.91). Au lieu de P·41 lisez P·11. (c
2·46·47·49. (p.91) Au lieu de $/N_1$ lisez $/(N_1+1)$, deux fois. (c
2·7 (p.92) Au lieu de N_0 lisez N_1. (c

2·51 $a,b,n\varepsilon N_1 \,.\, D(a,b) = 1 \,.\supset.$
$\Sigma\, [1\cdots(ab)]^n /(ab) - \Sigma\, (1\cdots a)^n /a - \Sigma\, (1\cdots b)^n /b \;\varepsilon\; N_1$
{ Staudt JfM. a.1840 t.21 p.372 } (p

·52 $n\varepsilon N_1 \,.\, a\varepsilon N_0 F 1\cdots n \,.\supset.\, (\Sigma a - 1)! \times Da \;\varepsilon\; N_1 \times \Pi(a!)$
{ Cauchy a.1841, OEuvres s.1 t.6 p.109 } (p

§ mlt (p.92)

·03 $m(a,b) = \iota\, N_1 \frown x \ni [\, N_1 \times x = N_1 \times a \frown N_1 \times b \,]$ Dfp (pd

$a\varepsilon\, \mathrm{Cls'R} \,.\, \mathrm{Num}a \;\varepsilon\; N_1 \,.\supset.$

2·31 $m/a = /Da$ [P·3 .⊃. P]
·32 $ma = /D/a$ [$(/a|a)$P.31 .⊃. P] Dfp
·33 $/ma = D/a$ [P·32 .⊃. P]
·34 $Da = /m/a$ [P·31 .⊃. P] Dfp (pd

§nt dt P1·8 (p.94). Au lieu de (dt$a$) lisez (dt$a$)^m (c

·52 $a \times b \varepsilon N_1 \,.\supset.\, \mathrm{nt}a \;\varepsilon\; N_1 \times \mathrm{dt}b \,.\, \mathrm{nt}b \;\varepsilon\; N_1 \times \mathrm{dt}a$ (c

§Np 1·4. *Note* — R. Haussner a vérifié que $2 \times 2 \cdots 5000 \supset Np + Np$ (Jahres-Versammlung der Deutschen Math. Verein. a.1900 p.7) (v

3·3. (p.96) Au lieu de N_0 on peut lire N_1. (c
3·91 (p.97). Ajoutez [$a\varepsilon N_1 + 3$ §Np15·7·71 .⊃. P] (c
5·4. (p.97) Simplifiez l'Hp en $p\varepsilon$ Np. (c
5·9 (p.97). Au lieu de $a\varepsilon$ N lisez $a\varepsilon N_1$. (c
(p.97) ligne 3 en remontant, après « continuation », lisez P12·6. (c
8·1·2 (p.98). Dans l'Hp, au lieu de $q\varepsilon\, 1\cdots(p-1)$, il me semble qu'on doit lire $q\varepsilon\, 1\cdots(p-2)$. (c

8·4 $m\varepsilon\, Np \,.\, n\varepsilon N_1 \,.\, m > n+1 \,.\supset.\, \Sigma\, (1\cdots m)^n \;\varepsilon\; N_1 \times m$
{ Lionnet ; voir Catalan BelgioquM. t.46 a.1886 p.14 }(p

11·1 (p.99). Cette P contient le signe $\surd$ qui n'est pas encore défini. (c

11·1. On peut éliminer le symbole $\surd$ qui y figure en l'écrivant:

$a \varepsilon N_1 . \supset . a! = \Pi \{ \Pi [\Pi [Np \frown x \ni (s^r x^r \leqq a)] | s, N_1] | r, N_1 \}$ (v

12·4 (p.99). Changez l'Hp en $a \varepsilon N_1 + 1$ ou bien en $a^m + b^n \varepsilon Np - \iota 2$. (c

12·6. Autre Dem:

{ MERTENS WienA. a.1899; WarszawaP. t.11 p.194 } (p

§mp 2·01 $p \varepsilon Np . b \varepsilon 0 \cdots (p-1) F 0 \cdots n . a = \Sigma(b_r p^r | r, 0 \cdots n) . \supset .$
$mp(p, a!) = (a - \Sigma b)/(p-1)$

{ KUMMER a.1852 JfM. t.44 p.115 } (v

§ Nprf (p.103).

$Nprf \frown (2N_1+1) \supset Np \times [(2N_1+1) \times (2N_1+1)]^2$

{ DESCARTES a.1638 t.2 p.429:

« [Il n'y a] point de nombres parfaits impairs, si ce n'est qu'ils soient composés d'un seul nombre premier, multiplié par un carré dont la racine soit composée de plusieurs autres nombres premiers ». }

$Nprf \frown (2N_1+1) \supset (4N_0+1) \times N_1^2$ (v

{ FRENICLE a.1657; voir Huygens Oeuvres t.2 p.32:

« Pour les nombres parfaits ... impairs, s'il y en a aucun, il doit estre multiple d'un quarré par un nombre pairement pair plus 1 ». } (v

$a \varepsilon Nprf \frown (2N_1+1) . \supset . Num(Np \frown a/N_1) \geqq 6$

{ SYLVESTER a.1888 *Mathesis* t.8 p.57 } (v

§l' pag. 105 ligne 13 d'en bas. Au lieu de δv, lisez: ϑv (v

§Q 18·7 (p.108). Au lieu de $u+v$ lisez $u \smile v$ (p

53. Ajoutez:

·01 $a \varepsilon q . m \varepsilon 2N_1+1 . \supset . \sqrt[m]{a} = \iota\, q \frown x \ni (x^m = a)$ Df

Cette Df est appliquée dans les P55·7, 58·2·3. (c

55·3 (p.111) Au lieu de $a>b$ lisez $a<b$. (c

§Log p.115. *Note sur les logarithmes.*

Neper reconnut plus tard les avantages de tables donnant les logarithmes en base « dix »; Briggs a commencé ce calcul, et publia a.1624, les logarithmes des nombres $1 \cdots 20\,000$ et $90\,000 \vdash 100\,000$ à moins de 10^{-10}.

Wlacq a.1628 publia la table des log $1 \cdots 100\,000$ à dix décimales.

On a publié beaucoup d'éditions des tables de logarithmes. Dans les applications pratiques des astronomes et des ingénieurs sont commodes les tables à 5 décimales.

Dans les applications plus communes, les ingénieurs adoptent la « règle logarithmique ». La multiplication est obtenue en faisant glisser l'une des parties de la règle sur l'autre, et on lit immédiatement le produit.

Si l'on adopte la numération binaire, les tables correspondantes des logarithmes sont 5 fois plus courtes; la longueur de la règle logarithmique est aussi réduite dans le même rapport. (p

§Q 41·4

H. Padó, dans l'« Enseignement Mathématique » mars a.1901 vient d'analyser les démonstrations de cette prop.

§λ 1·5 (p.118). Au lieu de (N_1 lisez ($/N_1$ (p

§λ 3·1 $u \varepsilon \mathrm{Cls'q} .\supset. \Lambda u = \lambda u \cup \iota \mathrm{l}'u \cup \iota \mathrm{l}_1 u$ Dfp (v

FONCTIONS ANALYTIQUES

§cres ·911 $f \varepsilon (\mathrm{qf}u)\mathrm{decr}_0 . x \varepsilon u .\supset. \mathrm{l}'f``u = \mathrm{l}'f[u \cap (x - Q_0)]$

·912 » » $\mathrm{l}_,$ » $\mathrm{l}_,$ » + »

Ex. §Lm 1·4 Dem. (Ramorino

§Lm P1. $x \varepsilon \mathrm{qf} N_0 .\supset.$

·03 $(\mathrm{Lm}x) - (x`N_0) = (\Lambda x`N_0) - (x`N_0)$ (v

·04 $(\mathrm{Lm}x) \cap (x`N_0) = a \ni [m \varepsilon N_0 .\supset_m. a \varepsilon x`(m+N_0)]$ (v

§ Lm 1·2 Dem.

[Hp . P·0 $.\supset.\cdot. +\infty \varepsilon \mathrm{Lm}x .=: m \varepsilon N_0 .\supset_m. +\infty \varepsilon \Lambda x`(m+N_0)$ (1)

(1) . §λ P3·0 $.\supset.\cdot. +\infty \varepsilon \mathrm{Lm}x .=: m \varepsilon N_0 .\supset_m. \mathrm{l}'x`(m+N_0) = \infty$ (2)

Hp . $m \varepsilon N_0$. §' P1·2 $.\supset.$ $x`(m+N_0) \supset x`N_0$ (3)

Hp . (3) . §Q P18·5 $.\supset. \mathrm{l}'x`(m+N_0) \leq \mathrm{l}'u N_0$ (4)

(2) . (4) $.\supset.$ Ths]

1·3 Dem

[Hp . P·0 $.\supset.\cdot. -\infty \varepsilon \mathrm{Lm}x .=: m \varepsilon N_0 .\supset_m. -\infty \varepsilon \Lambda x`(m+N_0)$ (1)

(1) . §λ P3·0 $.\supset.\cdot. -\infty \varepsilon \mathrm{Lm}x .=: m \varepsilon N_0 .\supset_m. \mathrm{l}_1 x`(m+N_0) = -\infty$ (2)

Hp . $m \varepsilon N_0$. §' P1·2 $.\supset.$ $x`(m+N_0) \supset x`N_0$ (3)

Hp . (3) . §Q P18·5 $.\supset. \mathrm{l}_1 x`(m+N_0) \geqq \mathrm{l}_1 x`N_0$ (4)

(2) . (4) $.\supset.$ Ths]

1·6 Dem

[Hp .§ λ P1·1 $.\supset. \mathrm{q} \cap \mathrm{Lm}x \supset \lambda(\mathrm{q} \cap \mathrm{Lm}x)$ (1)

Hp . $m \varepsilon N_0 . y \varepsilon \lambda (\mathrm{q} \cap \mathrm{Lm}x)$. P1·0 . §λ P3·2 $.\supset. y \varepsilon \lambda\lambda\, x`(m+N_0)$ (2)

» » . (2) . §λ P1·2 $.\supset. y \varepsilon \lambda\, x`(m+N_0)$ (3)

» (3) . Export $.\supset: m \varepsilon N_0 .\supset_m. y \varepsilon \lambda x`(m+N_0)$ (4)

Hp . $y \varepsilon \lambda(\mathrm{q} \cap \mathrm{Lm}x)$. (4) . P1·0 $.\supset. y \varepsilon \mathrm{q} \cap \mathrm{Lm}x$ (5)

(1) . (5) $.\supset.$ Ths] (Ramorino

§Lm P4·6 (p.124) Dem.

$u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{q} \,.\, f \varepsilon \mathrm{q}\mathrm{f}u \,.\, v \varepsilon \mathrm{Cls}'u \,.\, x \varepsilon \delta v \,.\supset::$

$h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{Oper} \,.\supset.\quad v - \iota x \frown y \ni [\mathrm{mod}(y-x) < h] \supset \quad u - \iota x \frown y \ni [\mathrm{mod}(y-x) < h]$

$» \,.\, §'\mathrm{P}1{\cdot}2 \,.\supset.\quad f'\{ \quad » \quad » \quad » \quad \} \supset \quad f'\{ \quad » \quad » \quad » \quad \}$

$» \,.\, §\lambda 3{\cdot}31 \,.\supset.\quad \Lambda » \quad » \quad » \quad » \quad \supset \quad \Lambda » \quad » \quad » \quad »$

$» .\, \mathrm{Oper}\ a\varepsilon \,.\supset: a \varepsilon \Lambda » \quad » \quad » \quad » \quad .\supset.\ a \varepsilon \Lambda » \quad » \quad » \quad »$

$§\supset \mathrm{P}7{\cdot}13 \,.\supset:.\ h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h .\, a \varepsilon \Lambda \quad » \quad » \quad :\supset: h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h a \varepsilon \Lambda » \quad » \quad »$

$\mathrm{Oper}\ a\ni \,.\supset: a \ni [\quad » \quad » \quad » \quad » \quad] \supset a \ni [\quad » \quad » \quad » \quad »$

Df Lm $.\supset.$ P (p

§Lm

J. Hadamard — *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Paris, Mai 1901.

Ici p.14-15, l'A. vient de rencontrer la classe que nons avons indiquée par Lmx, et «en s'écartant de la terminologie usuelle» l'appelle «l'ensemble dérivé de x ».

§lim 2·12: { O. BONNET BD. a.1871 t.2 p.215:

« Étant donnée une fontion réelle .... bien déterminée, $\varphi(u)$ d'une variable réelle ... u, on dit: 1° que cette fonction tend vers une limite finie et déterminée A, à mesure que u tend vers une valeur particuliére u' (nous supposons u' fini...), lorsqu' après avoir fixé arbitrairemant un nombre réel et positif ε aussi petit que l'on veut, il est possible de trouver un autre nombre réel et positif h, tel que, pour toute valeur de u, dont la différence avec u' a un module différent de zéro, mais inférieur à h, la valeur correspondante de $\varphi(u)$ ait avec A une différence dont le module soit compris entre zéro et ε; 2° que $\varphi(u)$ tend vers l'infini a mesure que u tend vers u', lorsque après avoir fixé un nombre réel et positif λ aussi grand qu'on le veut, il est possible de trouver un autre nombre réel et positif h, tel que, pour toute valeur de u dont la différence avec u' a un module différent de zéro, mais inferieur à h, la valeur corrospondante de $\varphi(u)$ ait un module toujours supérieur à λ: » } (v

§lim 8·9 $\lim(x^x | x, \mathrm{Q}, 0) = 1$ (p

9·11 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \lim \Sigma(1 \cdots n)^m / n^{m+1} \,|n = /(m+1)$ (p

10·4 . Ajoutez à l'Hp. $: r \varepsilon 1 \cdots m \,.\supset_r \Sigma[u(r,s) \,|s, \mathrm{N}_0]\ \varepsilon \mathrm{q}$ (p

13·401 $u \varepsilon (\mathrm{Q}\,\mathrm{f}\,\mathrm{N}_0)\mathrm{decr} \,.\, \Sigma(u, \mathrm{N}_0)\ \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, 0 = \lim(n u_n) | n$

{ CATALAN, ParisCR. a.1886 } (p

14·1 [$n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \Sigma / [1 \cdots (2^n)] > 1 + n/2 :\supset.$ P] (p

15·31 $u \varepsilon \mathrm{Q}\,\mathrm{f}\,\mathrm{N}_0 \,.\, \Sigma(u, \mathrm{N}_0) = \infty \,.\supset.\, \Sigma[u_n / \Sigma(u, 0 \cdots n) \,|n, \mathrm{N}_0] = \infty$

{ DINI, *Annali delle Università toscane*, a.1867 p.43 } (p

§lim 16·2 (p.131) Lisez $n(n+1)/2x^n$ au lieu de $n(n+1)/2x^2$. (c

§lim 18. Substituez à la ·6 la suivante:

·6 $u \varepsilon \mathrm{Q}\mathrm{f}\mathrm{N}_0 \,.\, a \varepsilon (\iota 1 \cup \iota{-1})\mathrm{f}\mathrm{N}_0 \,.\, \Sigma(u, \mathrm{N}_0) = \infty \,.\, \Sigma(au, \mathrm{N}_0)\ \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.$
$\lim[\Sigma(a, 0 \cdots n)/n] \,|n = 0$ { CESÀRO *Anal. Alg.* p.164 } (v

19. La Ths P·3 subsiste aussi dans d'autres Hp.
Voir Pringsheim, Encyklopädie I A 3 p.96.

§ lim 24·1.
Cauchy s.1 t.11 p.90 indique par Ix la fonction $(1+\text{sgn}x)/2$, et l'appelle « limitateur ». (p

§cont 3·11 $f\varepsilon\, \text{qfq} : y,z\varepsilon\, \text{q} \,.\supset_{y,z} . f(y+z) = fy+fz : a,b\varepsilon\, \text{q} \,.\, a<b \,.$
$\text{l}'f\text{‘}a \vdash b\ \varepsilon \text{q} :\supset. f\varepsilon\, (\text{qfq})\,\text{cont}$ { Darboux MA. a.1880 t.17 p.55 }
On peut donc substituer dans la 3·1 à la condition $f\varepsilon$ (qfq)cont, l'hypothèse de cette P. (v

§D 4·4. La Démostration, très simple, donnée ici est attribuée par Serret (a.1868, Calc. Diff. 3. éd. Paris a.1886 p.19) à Ossian Bonnet. La même démostration à été donnée par Grassmann a.1862, Werke, t.1$_2$ Leipzig a.1896 p.323. (v

§D P8 p.144. Sur la formule de Taylor.
Si dans la formule reproduite de Bernoulli, on pose $n = f'(a+z)$, et si l'on effectue l'intégration indiquée entre les limites 0 et $b-a$, elle se transforme en :

$$fb-fa = (b-a)f'b-(b-a)^2 f''b/2+(b-a)^3/3!\, f'''b - \ldots$$

d'où la formule 8 par la substitution $(x, x+h)$ au lieu de b et a.
L'identité des formules de Bernoulli et de Taylor, qui résulte évidemment par la transformation précédente, vient d'être mise en doute par M. A. Pringsheim BM. a.1900 p.433. (p
Cauchy a.1829 s.2 t.4 p.394 donne la fonction e^{-1/x^2} dont toutes les dérivées sont nulles, et dont la série de Taylor ne donne pas la valeur.
H. Poincaré AM. t.8 a.1886 p.295 (Méth. nouvelles de la mécanique céleste, Paris a.1893 p.2) dit que cette série est un développement asymptotique. (p

§D 10·4 $a,b\varepsilon\text{q} \,.\, a<b \,.\, f\varepsilon\, \text{qF}a \vdash b \,.\, x\varepsilon\, a{}^{-}b \,.\, \text{D}fx = 0 \,.\, \text{D}^2fx > 0 \,.\supset.$
$\exists\, (c,d) \ni [c\varepsilon\, a{}^{-}x \,.\, d\varepsilon\, x{}^{-}b \,.\, fx = \min f(c \vdash d)]$
[Hp $.\supset.$ $\lim[(f(x+h)-fx)/h^2 \,|h,\, a{}^{-}b-x, 0] = \text{D}^2fx/2 \,.\supset.$
$\exists\, (c,d) \ni [c\varepsilon\, a{}^{-}x \,.\, d\varepsilon\, x{}^{-}b : h\varepsilon\, c{}^{-}d-x \,.\supset_h .\, f(x+h) > fx \,.\supset.$ Ths] (p

§S 3·8 $f,g\varepsilon\, \text{qf}\Theta \,.\, \text{l}'f\text{‘}\Theta, \text{l}_{,}f\text{‘}\Theta, \text{l}'g\text{‘}\Theta, \text{l}_{,}g\text{‘}\Theta\ \varepsilon\text{q} \,.\, \text{S}(f,\Theta), \text{S}(g,\Theta)\ \varepsilon\text{q} \,.\supset.$
$\text{S}[gx\, \text{S}(f, 0 \vdash x)\, |x, \Theta] + \text{S}[fx\, \text{S}(g, 0 \vdash x)\, |x, \Theta] = \text{S}(f,\Theta) \times \text{S}(g,\Theta)$ (v
{ Hardy G. H. Mm. a.1901 t.30 p.185 } (v
Cette formule, qui coïncide au fond avec l'intégration par parties (§S 20·3) est donnée ici avec une hypothèse moins restrictive. Pour la Dem. voir §Σ 2·5 add. (v

4·1·2, 12·11. Au lieu de $|u$ lisez $/n\, |n$. (p

5·7 (p.150). Ajoutez
{ Wallis a.1655 p.428-433 } Continuation : §sin 12·2. (p

§S 10·9 $S(/, 1+Q) = \infty$. $n \varepsilon 1+Q . \supset . S(x^{-n} | x, 1+Q) = /(n-1)$
{ WALLIS a.1655 t.1 p.409 } (p

11·4 $m, n \varepsilon Q, . \supset . S[x^m(1-x)^n | x, \Theta] = S[x^m/(1+x)^{m+n+2} | x, Q]$ (p

§e 1·62. Remplacez par:

·62 $\lim {}^n\sqrt{\Pi(n+1 \cdots n)}] / n | n = 4/e$

[§lim P8·6 .ɔ. $\lim \{ {}^n\sqrt{\Pi(n+1 \ldots n)} \} / n | n$
$= \lim \{ \Pi[n+1 \cdots (n+1)] / (n+1)^{n+1} \} / \{ \Pi(n+1 \cdots n)/n^n \} | n$
$= \lim (2n+1)(2n+2) / (n+2)^2 / (1+/n)^n | n = 4/e$]

Tiré du journal « Le matematiche pure ed applicate » a.1901 p.115

§e 1·7 $\min(x^x | x \text{‘}Q) = e^{\wedge}(-/e)$

·71 $\max[(x^{\wedge}/x) | x \text{‘}Q] = e^{\wedge}/e$

2·3 Dem [P·2 . $n \varepsilon N_1 . \supset . e = \Sigma(/r! | r, 0 \cdots n) + \Sigma(/r! | r, n+N_1)$ (1)
$\Sigma(/r! | r, n+N_1) = /(n+1)! \{1+/(n+2)+/[(n+2)(n+3)]+\ldots\}$
$< /(n+1)! [1+/(n+1)+/(n+1)^2+/(n+1)^3+\ldots]$
$= /(n+1)! (n+1)/n = /(n!n)$ (2)
(1) . (2) .ɔ. P]

2·5 (p.155)

$n \varepsilon N_1 . x \varepsilon q - \iota 0 . \supset . (e^{nx}-1) / (e^x-1) = \Sigma\{x^r \Sigma[s^r | s, 0 \cdots (n-1)] / r! | r, N_0\}$

§e 5·21 L'intégrale considérée dans la 5·21 est dite « intégral eulérienne de seconde espèce », et s'indique par $\Gamma(n+1)$ (Legendre *Exer.* t.2 p.4).

5·31 $n \varepsilon Q . x \varepsilon Q . \supset . e^{x} S(e^{-z} z^n | z, \Theta x) = \Sigma[x^{n+r} / \Pi(n+1 \cdots r) | r, N_1]$

5·4 { LAGUERRE Fdm. BsF. a.1879 t.7 p.72 }

Cette intégrale est dite « logarithme-integrale » ; (Soldner a.1809), « hyperlogarithme » (Mascheroni), « Logologarithmus (Caluso) ».
On l'indique par li e-x (p

§log 2·4 remplacez par:

·4 $a, b \varepsilon Q . \supset .$

$\log[(a+b)/2] = (\log a + \log b)/2 + \Sigma\{(-1)^{n-1}[(a-b)^2/(4ab)]^n/(2n) | n, N_1\}$
[$(a+b)/2 = \sqrt{ab}\sqrt{[1+(a-b)^2/(4ab)]}$. P2·1 .ɔ. P]

·41 $\log[(a+b)/2] = (\log a + \log b)/2 + \Sigma\{[(a-b)/(a+b)]^{2n}/(2n) | n, N_1\}$
[$(a+b)/2 = \sqrt{(ab)}/\sqrt{\{1-[(a-b)/(a+b)]^2\}}$. P2·1 .ɔ. P] (p

Koralek a.1851, a remarqué, que en supposant connus les logarithmes des nombres 2, 3, 7, 11, 13, cette formule, où la série est reduite à son premier terme, donne le logarithme d'un nombre quelconque avec une erreur inferieure à la moitié d'une unité décimale du septième ordre (Cauchy s.1 t.11 p383).

§log 2·9 $x \varepsilon Q . \supset .$

$\log x = [(x - x^{-1})/2] \,/\, \Pi\, [(x \uparrow 2^{-r} + x \uparrow -2^{-r})/2 \,|r, N_1]$ Dfp

$\log x = [(x-1)/\Pi\, [(1 + x \uparrow 2^{-r})/2 \,|r, N_1] =$

$(1 - x^{-1})/\Pi\, [(1 + x \uparrow -2^{-r})/2 \,|r, N_1]$

{ Seidel JfM. a.1871 t.73 p.276, 278 } (v

§log 4·4 Au lieu de $1 - \Sigma$ lisez· $\log x - \Sigma$. (p

§C ·6 $C = -\mathrm{S}(e^{-x} \log x \,|x, Q)$ (p

Ajoutez: §Fc = (fraction continue)

* 1. $a \varepsilon \mathrm{qf} N_1 . n \varepsilon N_1 . \supset .$ ·0 $\mathrm{Fc}(a, 1 \cdots 1) = /a$ Df

·01 $\mathrm{Fc}[a, 1 \cdots (n+1)] = /[a_1 + \mathrm{Fc}(a_{1+r} |r, 1 \cdots n)]$ Df

·02 $\mathrm{Fc}(a, N_1) = \lim \mathrm{Fc}(a, 1 \cdots n) \,|n$ Df

$a \varepsilon N_1 f N_1 . n \varepsilon N_1 . \supset .$

·1 $\mathrm{Fc}(a, 1 \cdots n) \; \varepsilon \; R \frown (1 - R_0)$

·2 $\mathrm{Fc}(a, N_1) \; \varepsilon \; \theta - R$

Soit a une suite de quantités, et n un nombre. $\mathrm{Fc}(a, 1 \cdots n)$ indique la fraction continue formée avec les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

On l'appelle aussi « réduite d'ordre n », selon plusieurs Auteurs (Baltzer ...) d'autres commencent la fraction continue par un entier a_0, et alors la réduite considérée est d'ordre $n+1$.

La notation $\dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$ est incommode.

Cataldi, *Trattato del modo brevissimo di trouare la Radice quadra...* a.1613 p.70:

« Notisi, che non si potendo comodamente nella stampa formare i rotti, & rotti di rotti come andariano,... noi da qui inanzi gli formaremo tutti à questa similitudine

Di 18. la R sia 4. $\& \frac{2}{8.} \& \frac{2}{8.} \& \frac{2}{8.} \& \frac{2}{8.}$

facendo vn punto all'8 denominatore di ciascun rotto, à significare, che il seguente rotto è rotto d'esso denominatore. »

J. Müller *Allg. Arithm* .a.1838 l'a remplacée par $\dfrac{1}{a_1} \dot{+} \dfrac{1}{a_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \dfrac{1}{a_n}$,

modifiée en $\dfrac{1}{a_1 +} \; \dfrac{1}{a_2 +} \cdots$ par d'autres.

La notation, que nous adoptons, est très commode, et elle est d'accord avec toutes les notations du Formulaire.

$a \varepsilon \mathrm{N_1 f N_1} \,.\, n \varepsilon \mathrm{N_1} \,.\supset.$

·3 $\mathrm{nt\,Fc}[a, 1\cdots(n+2)] = a_{n+2} \times \mathrm{nt\,Fc}[a, 1\cdots(n+1)] + \mathrm{nt\,Fc}(a, 1\cdots n)$

·31 dt » » » dt » » dt »

·32 $\mathrm{Fc}[a, 1\cdots(n+1)] - \mathrm{Fc}[a, 1\cdots n] =$
$(-1)^n /\{\mathrm{dt\,Fc}(a, 1\cdots n) \times \mathrm{dt\,Fc}[a, 1\cdots(n+1)]\}$

La règle ici expliquée se rencontre dans Schwenter Daniel, *Deliciae Physico-mathematicae*, Nürnberg a.1636 p.111. Voir Favaro BBonc. t.7 p.57.

·4 $\mathrm{Fc}(a, \mathrm{N_1}) - \mathrm{Fc}(a, 1\cdots n) \,\varepsilon\, \theta(-1)^n /\{[\mathrm{dt\,Fc}(a, 1\cdots n)]^2$

·5 $\mathrm{dt\,Fc}(a, 1\cdots n) = \mathrm{dt\,Fc}[a(n-r+1)|r, 1\cdots n]$
{ Cayley, Phil. Magaz. a.1853 }

$\mathrm{ntFc}(a, 1\cdots n)$ s'appelle « continuant d'ordre n de la suite a » (Sylvester AJ. a.1878 t.1 p.344).

·6 $x \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{N_1} \frown n \ni \{\exists\, \mathrm{N_1 f} 1\cdots n \frown a \ni [x = \mathrm{E}x + \mathrm{Fc}(a, 1\cdots n)]\}$
[=§Q 84·1]

·7 $x \varepsilon\, \theta\text{-}\mathrm{R} \,.\supset.\, x = \mathrm{Fc}(\mathrm{E}/(\beta/)^n x \,|n, \mathrm{N_1})$

·8 $(\sqrt{5}-1)/2 = \mathrm{Fc}\,(1, 1, 1, \ldots) = \mathrm{Fc}\, \imath(\iota 1\, \mathrm{F}\, \mathrm{N_1})$

Les nt de cette fraction continue forment la « suite de Fibonacci ».

·81 $a \varepsilon \mathrm{N_1} \,.\supset.\, \sqrt{(a^2+1)} = a + \mathrm{Fc}\,(2a, 2a, 2a, \ldots)$

·9 $\mathrm{e} = 2 + \mathrm{Fc}(1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots)$ [= §e 3·1

·91 $\pi = 3 + \mathrm{Fc}\,[7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1, \ldots]$ { Wallis t.2 p.51 }

✱ 2·1 $a \varepsilon \mathrm{Q f N_1} \,.\supset:\, \mathrm{Fc}(a, \mathrm{N_1}) \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.=.\, \Pi[(1+a_r)|r, \mathrm{N_1}] = \infty$
{ Oppermann, *ZeuthenT.* a.1884 p.163 } (p

Ajoutez: § Δ = (différence)

Δ est l'initiale de « différence ». La formule $\Delta f x$ doit être décomposée en $(\Delta f)x$, et non en $\Delta(fx)$, qui n'a pas de signification; cette remarque est analogue à celle pour le signe de dérivation D.

L'application exacte des notations du Formulaire empêche toute ambiguïté. P. ex. la notation $\Delta 0^n$, qu' on rencontre dans plusieurs A., et qui ne signifie $\Delta(0^n)$, ni $(\Delta 0)^n$, sera ici remplacée par $\Delta(x^n|x)0$.

+ − ·0 $f \varepsilon\, \mathrm{qf N_0} \,.\, x \varepsilon \mathrm{N_0} \,.\supset.$
$(\Delta f)x = \Delta f x = f(x+1) - fx$ DfΔ

·1 $\mathrm{Hp}{\cdot}0 \,.\, g \varepsilon\, \mathrm{qf N_0} \,.\supset.\, \Delta[(fx+gx)|x]x = \Delta fx + \Delta gx$

× ·2 $\mathrm{Hp}{\cdot}0 \,.\, a \varepsilon \mathrm{q} \,.\supset.\, \Delta[(a \times fx)|x]x = a \times \Delta fx$

/ ·23 $n \varepsilon N_1 . \supset . \Delta n/x = (-1)^n n! / \Pi(x+0 \cdots n)$

$\upharpoonleft$ ·3 $a \varepsilon q . x \varepsilon N_0 . \supset . \Delta(a^x|x)x = a^x(a-1)$

·31 $n \varepsilon N_1 . \supset . \Delta^n (x^n|x)0 = n!$

Σ ·4 $Hp{\cdot}0 . \supset . \Delta[\Sigma(f, 0 \cdots x) |x]x = f(x+1)$

·41 $x,y \varepsilon N_1 . \supset . \Delta[\Pi(x+0 \cdots y) |y]y = \Pi(x+1 \cdots y)$

·42 » » $\Delta / \Pi[(x+0 \cdots y) |y]y = -(y+1) / \Pi[x+0 \cdots (y+1)]$

Cmb ·5 $Hp{\cdot}0 . n \varepsilon N_1 . \supset . f(x+n) = \Sigma[\mathrm{Cmb}(n,r)\Delta^r fx |r, 0 \cdots n]$

·6 $Hp \cdot 5 . \supset . \Delta^n fx = \Sigma[(-1)^r \mathrm{Cmb}(n,r) f(x+n-r) |r, 0 \cdots n]$

{ ·5-·6 MERCATOR a.1668 p.12 {

Ajoutez: § prob = (Probabilité)

$a,b,s \varepsilon \mathrm{Cls} . \mathrm{Num}s \varepsilon N_0 . \supset .$

·0 $\mathrm{prob}(a,s) = \mathrm{Num}(a \frown s) / \mathrm{Num}s$ Df

·01 $a \supset s . \supset . \mathrm{prob}(a,s) = \mathrm{Num}a / \mathrm{Num}s$ Dfp

·1 $\mathrm{prob}(\Lambda, s) = 0$ ·11 $\mathrm{prob}(s,s) = 1$

·2 $\mathrm{prob}(-a, s) = 1 - \mathrm{prob}(a,s)$

·3 $a \frown b = \Lambda . \supset . \mathrm{prob}(a \smile b, s) = \mathrm{prob}(a,s) + \mathrm{prob}(b,s)$

·31 $\mathrm{prob}(a \smile b, s) + \mathrm{prob}(a \frown b, s) = \mathrm{prob}(a,s) + \mathrm{prob}(b,s)$

NOMBRES COMPLEXES

§Dtrm (p.165) 1·2. Lisez ·2 au commencement. (p

$m \varepsilon N_1 . a \varepsilon qF(1 \cdots m \,\text{!}\, 1 \cdots m) . \supset :$

✱ 1·12 $r,s \varepsilon 1 \cdots m . r < s . \supset_{r,s} . a(r,s) = 0 : \supset .$
$\mathrm{Dtrm}a = \Pi[a(r,r) |r, 1 \cdots m]$

·13 $r,s \varepsilon 1 \cdots m . r+s > m+1 . \supset_{r,s} . a(r,s) = 0 : \supset .$
$\mathrm{Dtrm}a = (-1) \upharpoonleft [m(m-1)/2] \Pi[a(r, m+1-r) |r, 1 \cdots m]$

·14 $r \varepsilon 1 \cdots m : s \varepsilon 1 \cdots m . \supset_r . a(r,s) = 0 : \supset . \mathrm{Dtrm}a = 0$

·21 $h,l \varepsilon 1 \cdots m . h -= l : r \varepsilon 1 \cdots m . \supset_r . a(r,h) = a(r,l) : \supset . \mathrm{Dtrm}a = 0$

·22 $m \varepsilon N_1 . a,b \varepsilon qF(1 \cdots m \,\text{!}\, 1 \cdots m) . k \varepsilon q . h \varepsilon 1 \cdots m : r \varepsilon 1 \cdots m . \supset_r .$
$a(r,h) = kb(r,h) : l \varepsilon 1 \cdots m - \iota h . r \varepsilon 1 \cdots m . \supset_{r,l} . a(r,l) = b(r,l) : \supset .$
$\mathrm{Dtrm}a = k\mathrm{Dtrm}b$

·23 $m \varepsilon N_1 . a,b \varepsilon qF(1 \cdots m \,\text{!}\, 1 \cdots m) . k \varepsilon q : r,s \varepsilon 1 \cdots m . \supset_{r,s} .$
$b(r,s) = k^{r-s} a(r,s) : \supset . \mathrm{Dtrm}a = \mathrm{Dtrm}b$

·24 $m \varepsilon N_1 . a,b \varepsilon qF(1 \cdots m \,\text{!}\, 1 \cdots m) . k \varepsilon q . h,l \varepsilon 1 \cdots m . h -= l :$
$r \varepsilon 1 \cdots m . \supset_r . b(r,h) = a(r,h) + ka(r,l) : p \varepsilon 1 \cdots m - \iota h . r \varepsilon 1 \cdots m . \supset_{r,p} .$
$b(r,p) = a(r,p) : \supset . \mathrm{Dtrm}a = \mathrm{Dtrm}b$ (Cantoni

§ lin ✱ 16·0 $m,n \varepsilon N_1 . u \varepsilon Clsq_n . f \varepsilon q_m fu . x \varepsilon u \frown \delta u . \supset .$
$D(f,u,x) = \imath\, (q_m\, f\, q_n\,)lin \frown g \ni [\lim \{ [fy - fx - g(y-x)]/mod(y-x) | y, u, x \} = 0]$ Df

Définition de la dérivée d'un nombre complexe fonction d'un autre nombre complexe. Elle est une tranformation linéaire, representée par une matrice dont les éléments sont les « derivées partielles des m coordonnées de f par rapport aux n variables. Ex. §vct 61·0

Cette dérivée est la « déformation infiniment petite d'un corps », considérée dans la physique mathématique.

·1 $m,n,p \varepsilon N_1 . k \varepsilon Cls'q_m . k \supset \delta k . f \varepsilon q_n f k . g \varepsilon q_p f k . x \varepsilon k .$
$D(f,k,x) \varepsilon (q_n f q_m) lin . D(g, f'k, fx) \varepsilon (q_p f q_n) lin . \supset .$
$D(gf, k, x) = D(g, f'k, fx)\, D(f,k,x)$

·2 $m,n \varepsilon N_1 . u \varepsilon Cls'q_n . l'mod u \varepsilon q_n .$
$g \varepsilon (q_n fu) sim . Dg \varepsilon (Subst\, q_n) fu . Dtrm\, Dg \varepsilon Qfu .$
$f \varepsilon q_m f(g'u) . S(f, g'u) \varepsilon q_m . \supset .$
$S(f, g'u) = S(fg \times Dtrm\, Dg, u)$

{ LAGRANGE BerlinM. a.1733, pour $n=3$; CAUCHY a.1845 s.1 t.9 p.271 }

Dtrm Dg est dit « déterminant jacobien »

§q' 21·2 $w + xi + yk + zik = Sb[w+y, -x+z, x+z, w-y]$
$Sb[(p, q), (r, s)] = [(p+s) + (r-q)i + (p-s)k + (q+r)ik]/2$ (p

§q' P3·5 (p. 172). Ajoutez l'Hp $a -= 0$. (c

§π (p.175):

P1·1. Au lieu de $2\theta X^{-2}$ lisez θX^{-2}. (c
P1·4. Au lieu de θX^{-4} lisez θX^{-5}. (c
P1·5. Au lieu de θX^{-5} lisez θX^{-6}. (c
P1·85. Au lieu de $-\theta X^{-7}$ lisez $+\theta X^{-6}$. (c

§π 3·2. On peut aussi écrire la formule de Wallis sous la forme suivante, qui donne l'expression du facteur général:

$\pi = 2\Pi \{ 2E[(n+1)/2] / [2E(n/2)+1] \,|\, n, N_1 \}$

·21 $\pi/2 > (2 . 4 . 6 \ldots 2n)^2 / \{ [1 . 3 . 5 \ldots (2n-1)]^2 (2n+1) \}$
$\pi/2 < (2 . 4 . 6 \ldots 2n)^2 (2n+2) / [1 . 3 . 5 \ldots (2n+1)]^2$
{ WALLIS t.1 p.467 } (p

10·6 $S[\surd(1-x^2)|x, \Theta] = \pi/4$ { WALLIS a.1655 p.417 :

« Circulus ad Quadratum Diametri, (vel etiam Ellipsis quælibet ad Parallelogrammum sibi circumscriptum,) eam habet rationem, quam habent

Radices Quadraticæ universales Residuorum seriei infinitæ Æqualium serie Secundanorum mulctatæ, ad seriem illam Æqualium. » } (p

11·21 $a \varepsilon Q$.⊃. $S[e \wedge -(x^2+a^2/x^2) \, |x, Q] = \sqrt{\pi}\, e^{-a}/2$
} LAPLACE (ParisM. a.1810, publ. a.1811) Oeuvres t.12 p.368 } (v

11·1 } EULER PetrC. a.1730 (publ. a.1738) t.5 p.44 } (v

§sin 1·6 Cette même proposition, avec la 2·4 add., a été employée (mais non demontrée, ni même énoncée en général) par Aristarchus = Ἀρισταρχος, Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης a.. —310 ⊢ —250), Paris a.1810 p.40. (v

§sin 2·4 $x, y \varepsilon \theta\pi/2$. $x > y$.⊃. $tx/x > ty/y$
} ARISTARCHUS p.36; voir §sin 1·6 add. } (v

4·1. $sx - sy = 2s[(x-y)/2]\, c[(x+y)/2]$ (c

4·1. *Note.* — La formule $\sin a \sin b = [\cos(a-b) - \cos(a+b)]/2$ permet de reduire la multiplication à l'addition au moyen d'une table des sinus. C'était la méthode, appellée προσθαφαίρεσις, suivie par les astronomes avant la découverte des logarithmes. Cette méthode attribuée à Joh. Werner (a.1488 ⊢ 1528) par plusieurs A., (voir M. Cantor t.2 p.454), a été abandonnée étant d'usage moins commode que la méthode des logarithmes. (v

5·3 Substituez aux citations d'Euler et de Gauss les suivantes:

·32 } EULER a.1737 PetrC. t.9 p.231 } (v

·33 » » » » » (v

·35 } MACHIN; voir JONES a.1706 p.263 } (v

·43 $\pi = 16\, t^{-1}/5 - 4\, t^{-1}/70 + 4\, t^{-1}/99$
} EULER a.1737 PetrC. t.9 p.232 } (v

6·3 (p.185) . Au lieu de y-ε 2nπ lisez: y-ε nπ. (c

8·21 } EULER *Calc. Int.* a.1794 t.4 p.235 (PetrNC. a.1774 t.19) }

8·23 } EULER, *Calc. Diff.*, Pars II, Art. 57-93 } (v

·24 $x \varepsilon \theta\pi/2$.⊃. $\Pi \{\cos(x/2^n) \, |n, N_1\} = \sin x / x$ (v
} EULER a.1737 PetrC. t.9 p.235 } (v

8·3. Au lieu de /4 lisez: /2. (Ramorino

8·8 } PEACOCK a.1820 *Examples of the diff. Calculus*, Cambridge p.67 } (v

·81 $\pi = 4\Sigma\{t^{-1}/(2^n-1) \, |n, N_1+1\} = 4(t^{-1}/3 + t^{-1}/7 + t^{-1}/15 + \ldots)$
} PEACOCK a.1820 p.68 } (v

·82 $\pi = 4\Sigma\{t^{-1}/(n^2+n+1) \, |n, N_1\}$ } EULER PetrNC. a.1764 t.9 }(v

§sin 8·83 $a \varepsilon\, \Theta\pi/2 \,.\supset.\, /a = /ta + \Sigma\{2^{-r}t(2^{-r}a) \mid r, N_1\}$
{ EULER a.1746 CorrM. t.1 p.371 } (v

9·1. Au lieu de *n* lisez : n. (v

12·0 S(sin, $\Theta\pi/2$) = S(cos, $\Theta\pi/2$) =1 {WALLIS a.1670 p.707: «figura sinuum rectorum totius quadrantis quadrato radii æqualis est». } (p

12·8 Remplacez par:

·8 $z \varepsilon\, \Theta\pi \,.\supset.\, S[/(1 - 2x\cos z + x^2) \mid x, \Theta] = (\pi - z)/(2\sin z)$
{ EULER *Calc. Integr.* a.1794 t.4 p.288 (PetrNC a.1774 t.19) } (v

12·9 { EULER BerolMisc. a.1743 t.7 p.151 } (v

12·901 $m, n \varepsilon N_1 \,.\, m < n \,.\supset.$
$S[(x^{m-1} + x^{n-m-1})/(1+x^n) \mid x, \Theta] = \pi/[n\sin(m\pi/n)]$
{ EULER BerolMisc. a.1743 t.7 p.181 } (v

12·92 $S[(\cos x + x\sin x)/(1+x^2) \mid x, Q] = \pi/e$ (v
{ LAPLACE (ParisM. a.1782, publ. a.1785) Oeuvres t.10 p.264 } (v

13·1·2 { EULER *Calc. Integr.* a.1794 t.4 p.339-343 (presenté MS. à l'Acad. de St.Petersbourg a.1781) } (v

Ces P sont attribuées ordinairement à Fresnel. Euler qui les a données ici pour la première fois, n'a pu pourtant demontrer la 13·1. (v

13·31 $S\{x\sin x \,/\, [1+(\sin x)^2] \mid x, \Theta\pi\} = \pi[\log(\sqrt{2}+1)]/\sqrt{2}$
(Ramorino

13·5 { EULER PetrA. a.1777 t.2 p.7 } (v

17·1 $g \varepsilon\, [q\, f\, 2\Theta\pi]cres_0 \,.\, h \varepsilon\, [q\, f\, 2\Theta\pi]decr_0 \,.\, f = g - h \,.\, x \varepsilon\, 2\Theta\pi \,.\supset.$
$fx = S(f, 2\Theta\pi)\,/\,(2\pi) + \Sigma\{\cos(nx)\, S[fz\cos(nz) \mid z, 2\Theta\pi] \mid n, N_1\}/\pi$
$+ \Sigma\{\sin(nx)\, S[fz\sin(nz) \mid z, 2\Theta\pi] \mid n, N_1\}/\pi$
{ FOURIER, ParisM. a.1807 ; a.1822 p.212 :

« Ces théoremes conviennent à toutes les fontions possibles, soit que l'on en puisse exprimer la nature par les moyens connus de l'analyse, soit qu'elles correspondent à des courbes tracées arbitrairement ».

Les fonctions de la forme *g—h*, où *g* est croissante, *h* décroissante, sont dites « à variation bornée » (Jordan). (p

§B 1·01 $a \varepsilon\, qfN_0 \,.\, a_0 = 1 : n \varepsilon N_1 \,.\supset_n.$
$\Sigma[a_r/(n-r)! \mid r, 0\cdots(n-1)] = 0 \;:\supset:\; a_1 = -/2 : n \varepsilon N_1 \,.\supset_n.$
$a2n = (-1)^{n-1} Bn/(2n)! \;\;.\;\; a(2n+1) = 0$ (p

§B (p.190). *Note.* — La notation du Formulaire a été employée par Binet, JP. a.1839 t.16 cah.27 p.240. (v

1·20 $a \varepsilon N_1 . \supset . (a+1)(2a+1)\Sigma\{(-1)^{r-1}C(2a,2r-2)\, B_r /r \,|r,1\cdots a\} = 1$

[$(2a+1,1) \mid (m,n)P\cdot2 . \supset .$

$1 = /(2a+2) + /2 + \Sigma\{(-1)^{r-1}\, C(2a+1,2r-1)\, B_r /2r \,|r, 1\cdots a\}$ (1)

$(2a,1) \mid (m,n)P\cdot2 . \supset .$

$1 = /(2a+1) + /2 + \Sigma\{\ldots\ldots\ldots\ldots C(2a,2r-1)\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ (2)

$(1).(2) . \supset .$

$0 = /(2a+2) - /(2a+1) + \Sigma\{\ldots\ldots\ldots\ldots C(2a,2r-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ (3)

$(3) . \supset . /2(a+1)(2a+1) = \Sigma\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ (4)

$(4) . \supset . 1 = (a+1)(2a+1)\, \Sigma\{\ldots\ldots\ldots /r \ldots\ldots\ldots\}]$ (pd

§ B P1·23 (p.191). Au lieu de $Np-(N_1+3)$ lisez : $Np \frown (N_1+3)$. (c

§B 2·11 $r \varepsilon N_1 . \supset . B_r = (-1)^{r+1}\, D^{2r}[x/(e^x-1) \,|x, q, 0]$ Dfp (p

VECTEURS

§vct 8·6. Au lieu de $(a-b)\times(a-c) = 0$ lisez : $(a-c)\times(b-c) = 0$. (c

§vct 14·2. Ce théorème est contenu dans l'écrit suivant de Stewart: *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics.* Edinburgh a.1746. (v

34·1 La démonstration qui accompagne cette P est la traduction de celle donnée par Cauchy (s.1 t.9 p.264), par la méthode des projections. En remplaçant les projections par les produits $\times$, les deux pages de Cauchy sont réduites à deux lignes. (p

§vct 45·33. Lisez le second membre ainsi ... = $\text{Transl}[(1-e^{-it})(q-p)]$ (v

§vct ✱ 53.

$o \varepsilon \text{ pnt} . a,b \varepsilon \text{ vct} . \text{mod}a = \text{mod}b = 1 . a\times b = 0 . i = b/a . \supset .$

·1 $\text{Arc}[(o+e^{it}a) \,|t, 2\Theta\pi] = 2\pi$

Le point considéré décrit une « circonférence ».

·2 $x \varepsilon Q . \supset . \text{Arc}[(o+xa+x^2ia/2) \,|x, \Theta x] = S[\sqrt{}(1+x^2) \,|x, \Theta x]$
$= x/2 \sqrt{}(1+x^2) + /2 \log[x+\sqrt{}(1+x^2)]$

Le point décrit une « parabole ordinaire ».

·3 $p,q \varepsilon Q . \supset . \text{Arc}[(o + p \cos t\, a + q \sin t\, ia) \,|t, 2\Theta\pi] =$
$4S\{\sqrt{}[(p \sin t)^2+(q \cos t)^2] \,|t, \Theta\pi/2\}$

Le point décrit l' « ellipse de démi axes p et q ». Voir §sin 14·1·2.

·4 $x \varepsilon Q . \supset . \text{Arc}\{(o+ ax + ia(e^x+e^{-x})/2] \,|x, \Theta x\} = (e^x-e^{-x})/2$

La courbe considérée est dite « catenaria », « chaînette ». (p

Ajoutez: coord ✱ 62.

$i \varepsilon$ vct$-\iota 0$. $j \varepsilon$ vct$-\mathrm{q}i$. $k \varepsilon$ vct$-(\mathrm{q}i+\mathrm{q}j)$. $u \varepsilon$ vct . $\supset$:

·0 coord(u; i,j,k) $=$ $\iota\mathrm{q} \frown x \ni (u-x \; \varepsilon \; \mathrm{q}j+\mathrm{q}k)$ Df

·1 coord(u; i,j,k) $|u$ ε (qf vct)lin

coord(u; i,j,k) signifie « la première coordonnée du vecteur u, par rapport aux vecteurs i,j,k ».

✱ 70. a = (produit alterné)

L'expression $uavaw$ est le « produit alterné » ou « produit extérieur » des vecteurs u,v,w.

Grassmann a.1844 l'indique par $[uvw]$; on peut supprimer les parenthèses, qui n'ont pas ici la valeur donnée par § 1 P 1·2, et indiquer le « trivecteur » par uvw, notation adoptée par plusieurs A. Bien qu'elle ne produise pas d'ambiguïté avec le produit $u \times v$ considéré dans P8, toutefois, pour plus grande clarté, nous introduisons un nouveau signe de multiplication sous la forme a, initiale de « alterné ».

La même opération a été rencontrée, dans des cas particuliers, pa Hamilton a.1845 (voir P71), et par De Saint Venant (ParisCR. 15. 9. 1845), qui l'appelle « produit géométrique ».

Cauchy a.1853 (s.1 t.11 p.444) l'appelle « produit augulaire »; les vecteurs i, j k sont des « clefs »

Voir la bibliographie dans RdM. a.1895 p.179.

Nous définissons (P·0) d'abord le rapport de deux trivecteurs qui est un nombre; puis le trivecteur nul, et l'égalité de deux trivecteurs. Les v^3 se présentent ici pas abstraction, et forment un système d'objets irréductible avec les systèmes précédents.

$uavaw$ est représenté géométriquement par le parallelépipède construit sur u,v,w, considéré en grandeur et en sens. On peut partir de cette idée géometrique pour édifier une théorie des vecteurs.

v^2 signifie « bivecteur. » On peut le représenter par le parallélogramme construit sur u et v. Les v^2 forment un système linéaire à 3 dimensions.

$u,v,w,u',v',w' \varepsilon$ vct . $i \varepsilon$ vct$-\iota 0$. $j \varepsilon$ vct$-\mathrm{q}i$. $k \varepsilon$ vct$-(\mathrm{q}i+\mathrm{q}j)$. $\supset$∴

·0 $(uavaw)/(iajak) =$

$$\mathrm{Dtrm}\{[\,\mathrm{coord}(u;\, i,j,k),\ \mathrm{coord}(u;\, j,k,i),\ \mathrm{coord}(u;\, k,i,j)\,],\ [\,v \quad v \quad v\,],\ [\,w \quad w \quad w\,]\}$$ Df

·1 $uavaw = 0$.=: $r \varepsilon$ vct$-\iota 0$. $s \varepsilon$ vct$-\mathrm{q}r$. $t \varepsilon$ vct$-(\mathrm{q}r+\mathrm{q}s)$. $\supset_{r,s,t}$. $(uavaw)/(rasat) = 0$ Df

·11 $uauav = 0$

$\cdot 12$ $uavaw = 0 .=.$
$\exists(x,y,z)\ni[x,y,z\varepsilon q . -(x=y=z=0) . xu+yv+zw=0)$ Dfp

$\cdot 13$ $(u+u')avaw = uavaw + u'avaw$

$\cdot 2$ $v^3 = [(uavaw) \mid (u;v;w)] \text{`}(vct\text{`}vct\text{`}vct) =$ (trivecteur) Df

$a,b,c\varepsilon v^3 . m\varepsilon q .\supset\therefore$

$\cdot 3$ $a=b \;.=: x\varepsilon\, v^3 - \iota 0 .\supset_x . a/x = b/x$ Df

$.31$ $a = b+c \;.=:$ » $.\supset_x . a/x = b/x + c/x$ Df

$.32$ $a = mb \;.=:$ » $.\supset_x . a/x = m(b/x)$ Df

$\cdot 33$ $x\varepsilon\, v^3 - \iota 0 .\supset . a/x\, \varepsilon q$

$\cdot 4$ $uav = u'av' .=: w\varepsilon\, vct .\supset_w . uavaw = u'av'aw$ Df

$\cdot 41$ $uav = 0 .=: w\varepsilon\, vct .\supset_w . uavaw = 0$ Df

$\cdot 42$ $(uav)aw = uavaw$ Df

$\cdot 5$ $v^2 = [(uav) \mid (u;v)] \text{`}(vct\text{`}vct) =$ (bivecteur) Df

$\cdot 6$ $a,b,c\varepsilon\, v^2 . m\varepsilon q .\supset\therefore$

$a=b \;.=: w\varepsilon\, vct .\supset_w . aaw = baw$ Df

$a=0 \;.=:$ » » $=0$ Df

$a=b+c .=:$ » » $= baw + caw$ Df

$a=mb \;.=:$ » » $= m(baw)$ Df

I ✱ 71.

$i,j,k\varepsilon\, vct . \mathrm{mod}i = \mathrm{mod}j = \mathrm{mod}k = 1 . i\times j = j\times k = k\times i = 0 .\supset:$

$\cdot 0$ $I = (i,j,k)/(jak, kai, iaj)$ Df

L'opération I est dite « indice ». Elle fait correspondre à chaque v^2 un vct, normal au v^2, et ayant même la grandeur. Notre $I(uav)$ coïncide avec $V(uv)$ de Hamilton. L'opération I dépend des vecteurs i,j,k. Si on les change, I vient multiplié par ± 1. En général on prend i,j,k dirigés « en avant, à droite, en haut ».

$\cdot 1$ $a\varepsilon\, v^2 .\supset . Ia\, \varepsilon\, vct$

$\cdot 2$ $a,b\varepsilon\, v^2 .\supset . I(a+b) = Ia + Ib$ (p

✱ 80. Volum = (volume)

$\cdot 0$ $u\varepsilon$ Cls'pnt $.\supset .$ $\mathrm{Volum}\text{`}u$ = (volume intérieur de u) = $\text{l'}\, x\ni[\exists\, (o,i,j,k,h)\ni\{o\varepsilon\, pnt . i,j,k\varepsilon\, vct . i^2 = j^2 = k^2 = 1 . i\times j = j\times k = k\times i = 0 . h\varepsilon Q . x = h^3\times \mathrm{Num}(p,q,r)\ni[p,q,r\varepsilon n . o + (p+\theta)hi + (q+\theta)hj + (r+\theta)hk \supset u]\}]$ Df

Soit u une classe de points ou figure. Prenons un point o, trois vecteurs unitaires orthogonaux i, j, k, et un nombre positif h. Si p, q, r sont des nombres entiers, $o + (p+\theta)\, hi + (q+\theta)hj + (r+\theta)hk$ est le cube

dont un sommet est $o + phi + qhi + rhk$, et les côtés, dirigés selon les axes coordonnés, ont la longueur h. En variant p, q, r, on divise tout l'espace en cubes. Le nombre de ces cubes qui sont contenus dans la figure u, multiplié par h^3 (volume d'un cube), donne le volume d'une figure composée de cubes juxtaposés, et intérieure à la figure donnée. Ce volume dépend du choix des axes coordonnés, et du côté h. La limite supérieure de ces volumes, envariant les axes et h, est dite le « volume intérieur de u ».

·01 Hp·0 .⊃. Volum'u = (Volume extérieur de u) =
l,xɜ[——————————————————————
——————————————— . $x = h^3 \times$ Num(p,q,r)ɜ[$p,q,r\varepsilon$n .
ꓱ[$o+(p+\theta)hi + (q+\theta)hj + (r+\theta)hk$] ∩ u]}] Df

·02 Hp ·0 .⊃. Volum$u$ = ɿ(ιVolum,u ∩ ιVolum'u) Df

L'idée du volume d'une figure peut être considérée comme intuitive. Les règles pour trouver les volumes des figures plus simples sont très anciennes. Les exemples cités dans §π 1·1 de Ahmés a. —2000, ont pour but la mesure du volume des cylindres.

Selon Euclide, on reconnaît l'égalité de deux volumes par la superposition, ou en les décomposant en parties superposables, ou par un procès de limite (lib.12 prop.5).

La question, si deux polyèdres ayant le même volume, soient décomposables en parties superposables, a été résolue negativement par

M. Dehn Göttingen G. a.1900 Heft 3.

« Ein reguläres Tetraeder keinem Prisma raumgleich sein kann, dass also Tetraeder und Prisma auf keine Weise in respective congruente Teile zerlegt werden können ». (p

·1 $r\varepsilon$Q . $o\varepsilon$ pnt .⊃. Volum{pnt ∩ pɜ[mod$(x-o) < r$]} = $4\pi r^3/3$

{ Archimedes t.1 p.40 : *Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.* } (V

✱ 81. Area = (Aire)

·0 $u\varepsilon$ Cls'pnt . Volum$u$ =0 .⊃.
Area$u$ = lim {Volum{pnt ∩ xɜ[l,mod$(x-u) < h$]}/$(2h)$ |h, Q, 0} Df

Si la classe u a un volume nul, nous définissons l'aire de la figure u de la façon indiquée.

La considération des aires planes peut être faite comme pour les volumes, et l'on rencontre à peu près les mêmes difficultés.

La définition de l'aire d'une surface courbe quelconque donnée par Serret, Cours de calcul diff. et int. t.2 p.293, a été trouvée en même temps insuffisante

par H.A. Schwarz (Mathematische Abhandlungen Berlin a.1890 t.2 p.309), et par nous (LinceiAcc. 19 genn. 1890), où nous l'avons remplacée par une autre, analogue à la définition de Arc (P 56) et fondée sur la considération des bivecteurs. Nous en choisissons ici une plus élémentaire. (p

La définition donnée ici avait été reconnue possible par

BORCHARDT C. W. (Gesammelte Werke Berlin a.1888 p.67) a.1854 JdM. t.19 p.369:

« On sait que le volume compris entre deux surfaces parallèles se reduit au produit de l'aire de l'une des deux surfaces par leur distance, lorsque cette dernière devient infiniment petite. L'inversion de ce resultat montre que l'aire d'une surface peut être considérée comme la limite vers laquelle converge le rapport, dont le numérateur est le volume compris entre la surface et sa parallèle, et le dénominateur la distance des deux surfaces. »

Sans avoir remarqué ce passage de Borchardt, cette même définition a été proposée par

H. MINKOWSKI (Jahresber. der Deutschen Math. Verein. Leipzig a.1901 t.9 p.115):

« Es sei *F* eine Fläche. Man construire... den Bereich der Entfernung $\leqq r$, von *F*. Es sei $V(r)$ das Volumen dieses Bereichs, so kann der Grenzwert von $\frac{V(r)}{2r}$ für ein nach Null abnehmendes r (vorausgesetz, dass die Grösse $V(r)$ sowie dieser Grenzwert existirt), als die Oberfläche der Fläche *F* eingeführt werden ». H. Minkowski a donné aussi une définition analogue pour la longueur d'un arc, qui coïncide à peu près avec la 82·0. (v

·1 $r \varepsilon Q \,.\, o \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\supset.\, \mathrm{Area}\ \mathrm{pnt} \frown x \ni [\mathrm{mod}(x-o) = r] = 4\pi r^2$

{ ARCHIMEDES t.1 p.136: *Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.* } (v

✱ 82. Arc

·0 $u \varepsilon \mathrm{Cls'pnt} \,.\, \mathrm{Area}\,u = 0 \,.\supset.$

$\mathrm{Arc}\,u = \lim\{\mathrm{Volum}[\mathrm{pnt} \frown x \ni [1, \mathrm{mod}(x-u) < h]/(\pi h^2)] \,|\, h, Q, 0\}$ Df

·1 $o \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, i \varepsilon \mathrm{vct} - \iota 0 \,.\, r \varepsilon Q \,.\supset.$

$\mathrm{Arc}\ \mathrm{pnt} \frown x \ni [\mathrm{mod}(x-o) = r \,.\, (x-o) \times i = 0] = 2\pi r$ (v

Ajoutez à la TABLE DES SIGNES.

α = produit alterné	add. p.106	prob = probabilité	p.101
Δ = différence	p.100	v^2 = bivecteur	p.107
Area = aire	p.109	v^3 = trivecteur	p.107
coord = coordonnée	p.106	Volum, = Volume intérieur	p.107
Fc = fraction continue	p. 99	Volum' = » extérieur	p.108
I = indice	p.107	Volum = » propre	p.108

Ajoutez aux *Publications citées par une abréviation*:

BerlinAbh. = Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

GöttingenNachr. = Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse.

WarszawaP. = Prace Matematyczno-fizyczne, Warszawa.

PhilMagaz. = The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. Conducted by Lord Kelvin, G. F. Fitzgerald, W. Francis. London.

ZeuthenT. = Tidsskrifft for Mathematik (Copenhague).

Additions à la BIBLIOGRAPHIE

Toutes les citations sont relatives à ces additions.

Ahmès §vct 80*n*
Archimedes §vct 80·1 81·1
Arnaudeau §↑ 14·03
Aristarchus §sin 1·6 2·4
Binet §B 1·0*n*
Blater §↑ 14·03
Bonnet §lim 2·12 §D 4·4
Borchardt §vct 81*n*
Brigg §Log *n*
Catalan §lim 13·401
Cataldi § Fc 1·2
Cauchy §Σ10 §Dvr2·52
§lim 24·1 §D8*n* §lin16·2 §vct 70 *n*
Cayley §Fc 1·5
Cesàro §! 7·5 §lim18·6
Colson §Σ 10
Couturat §/ *n*
Darboux §cont 3·11
Dehn §vct 80
Descartes §Nprf
Dini §lim 15·31
Euclide §vct 80*n*
Euler §↑ 6·0 §! 7·71 §π 11·12
§sin 5·32·33·43 8·21·23·24·82
8·83 12·9·901 13·1·2·5.
Favaro §Fc 1·32*n*
Frenicle §Nprf
Fourier §sin 17·1
Grassmann §D 4·4 §vct 70*n*
Hadamard §Lm
Hamilton §vct 71*n*
Hardy §S 3·8
Haussner §Np 1·4

Jones §Num 82 §! 8 §sin 35
Jordan §sin 17·1 *n*
Koralek §log 2·41*n*
Kummer §↑ 6·1 §Np 2·01
Laguerre §e 5·4
Lagrange §↑ 9·09 § lin16·2
Legendre §e 5·21*n*
Maclaurin §↑ 9·30§ Σ20·6
Maurolycus §+ 4·3
Méray §/
Mercator §Δ ·6
Mertens §Np 12·6
Minkowski §vct 81*n*
Müller §Fc 1·2
Oppermann §Fc 2·1
Padé §Q 41·4*n*
Peacock §sin 8·8·81
Poincaré §D 8*n*
de Saint Venant §vct 70*n*
Schwarz §vct 81*n*
Schwenter §Fc 1·32*n*
Servois §⊃5·1 6·2 §− 1·5 §15
Staudt §Dvr 2·51
Stolz §/
Sylvester §Nprf §Fc 1·5*n*
Tannery §/
Vandermonde §! 6·3
Wallis §! 7·9 §S 5·7 10·9
§π10·6 §sin 12·0
Werner §sin 4·1*n*
Wlacq §Log*n*

Albino Nagy

Si spense inattesamente in Roma il 26 Marzo, nel suo trentaquatresimo anno, lasciando di sè gradito ricordo e non fugace rimpianto nei colleghi e nei discepoli.

ALBINO NAGY (1) nacque a Traù, in Dalmazia, il 2 ottobre 1866; non ebbe fratelli ed aveva appena sei anni quando gli morì il padre, Giuseppe, procuratore di stato a Zara; sua madre morì a Roma l'anno scorso.

Frequentò le scuole elementari e l'i. r. ginnasio di Zara, dando subito prova di intelletto pronto e versatile; superato con distinzione l'esame di maturità, nel 1884 si recó all'università di Vienna, dove nel 1888 conseguì a voti unanimi la laurea in matematica e con lode quella in filosofia.

Venuto a Roma nel 1889, insegnó nel 1889-90 lettere latine e greche nel ginnasio superiore pareggiato di Ceccano; negli anni 1890-96 insegnò filosofia nel liceo pareggiato di Velletri, avendo per due anni l'incarico di lettere latine e greche in quel r. ginnasio superiore.

Frattanto, il 14 dicembre 1892, fu abilitato per titoli alla privata docenza con effetti legali in Logica matematica presso la R. Università di Roma dove impartì lezioni negli anni 1893-96.

Dal 1896 sino agli ultimi giorni fu docente di filosofia nel r. liceo di Taranto.

Possedeva una cultura varia e multiforme, essendosi egli occupato di storia della filosofia araba, e di lingue orientali.

Qui però diamo soltanto l'elenco dei contributi che egli apportò alla logica matematica.

1890 — *Fondamenti del calcolo Logico.* Giorn. di Battaglini, Napoli 1890. (Estr. dalla sua dissertaz. di laurea: « Ueber Anwendungen der Mathematik auf die Logik »).

— *Sulla rappresentazione grafica, delle quantità logiche.* Rend. della R. Acc. dei lincei, Roma 1890.

1891 — *Lo Stato attuale e i progressi della logica,* Riv. Ital. di Filosofia, Roma 1891 t.6 II p.301-319. (Recens. in RdM. a.1892 t.2 p.80).

1892 — *Principii di logica esposta secondo le dottrine moderne.* Torino 1892.

— *I teoremi funzionali nel calcolo logico,* RdM. 1892 t.2 p.177-179.

1893 — *Ueber Beziehungen zwischen logischen Grössen,* Monatshefte für Mathematik, Wien 1893, t.4 p.147-153.

— *La logica matematica e il calcolo logico,* Riv. Ital. di Filosofia, Roma 1893, t.8 I p.389-395

1894 — *I primi dati della logica* id. Roma 1894, t.9 I p.33-70

— *Ueber das Jevons - Clifford'sche Problem* Monatsh. für Math., Wien 1894 t.5 p.331-345.

— *Sulla definizione e il compito della logica,* Roma, Balbi, 1894.

1896 — *Alcuni teoremi intorno alle funzioni logiche,* RdM. t.6 a.1896 p.21-24.

V.

(1) Le notizie qui date sono estratte da un cenno necrologico scritto da Alessandro Padoa, inserito nel fascicolo III Maggio-Giugno della Rivista Filosofica, Pavia, 1901.

Recensione

O. STOLZ und I. A. GMEINER — *Theoretische Arithmetik*, I. Leipzig, Teubner a.1900.

Il nome dello Stolz é ben noto nel mondo scientifico pei suoi lavori originali, e pei suoi trattati di Aritmetica e di Calcolo infinitesimale, ove si osserva un rigore eccezionale insieme all'uso degli ultimi risultati cui pervenne la scienza su questi soggetti. É quindi con piacere che sarà appresa la notizia di questa nuova opera. Esso è un trattato scolastico; e quantunque espresso col linguaggio ordinario, per la sua precisione ci può subito paragonare punto per punto col Formulario, a.1901, che indicheremo con F.

Nella 1ª sezione, che serve d'introduzione, dopo aver indrodotta l'idea di grandezza, in modo che la si può considerare come idea primitiva, l'A si occupa a p.2 dell'eguaglianza, enunciandone le tre proprietà caratteristiche (F §1 P10·1-·3). Ed aggiunge la condizione:

« Je zwei Dinge des Systemes müssen entweder gleich oder ungleich sein », la quale non è una proprietà dell'eguaglianza, ma un principio di logica, se colla parola ungleich = diseguale si intende « non eguale » (F§4 P1·2 e 3·6).

L'A dà al segno = un significato più ampio di quello che abbia nel F, e quindi non ammette la §1 P10·6. Diversamente detto, l'A considera varie specie di eguaglianze, tutte indicate collo stesso segno =. Invece nel F il segno = rappresenta costantemente un'eguaglianza sola, detta anche identità. Le relazioni soddisfacenti alle condizioni ·1·2·3 di §1 P10 sono espresse col segno = accompagnato da altri segni. Ciò è necessario a farsi nel F.

A p.5 l'A. parla del segno $<$, che considera come rappresentante un'idea primitiva, determinata mediante un sistema di proprietà. La 1) a p.6 si potrebbe erigere in definizione nominale sotto la forma $b>a \mathrel{.=.} a>b$.

La 2) é identica alla §$>$ P2·5 del F.

La 3) esprimente una proprietà del segno = secondo l'A. é soppressa dal F, ove il segno = ha un valore costante.

La 4) coincide con §$>$ P2·1 del F.

Siccome nel F il segno $>$ è definito nominalmente, queste P si presentano come teoremi, e non come Pp.

A p.9 l'A. spiega l'uso e la soppressione delle parentesi, assoggetandolo a regole chiare.

A p.10 l'A. spiega la regola di logica detto « Teorema di Hauber » F §$\wedge$ P2·6, e la regola delle negazioni data da §-P2·4.

La 2ª Sezione tratta dei « numeri naturali ». L'A. esaminata la definizione Euclidea, e le osservazioni di Helmholtz, Kronecker, Dedekind; sceglie la trattazione del « Formulaire », sia nella sostanza che nella forma. Il numero successivo d'un numero a é indicato con $a+$; con questa operazione definisce le cifre, compreso il simbolo X per indicare il « dieci ».

L'addizione è definita per induzione e i teoremi sono dimostrati come nel F.

E noi siamo ben lieti nel vedere che le teorie pure sviluppate nel Formulario acquistino sempre più importanza anche nel campo didattico.

L'A. incomincia la numerazione con 1, come in F1888; mentre nel F1898 e oggi la numerazione comincia con 0, onde eliminare la difficoltá nel definire lo 0.

Inoltre, a causa del valore che l'A. attribuisce al segno $=$, egli aggiunge ancora alle Pp la $a=a$, che nel F appartiene alla logica pura.

Il principio d'induzione, o della « conclusione da n ad $n+1$, é dall'A. attribuita a Bernoulli, mentre nel F é citato Pascal.

La definizione del prodotto é pure data per induzione, e le dimostrazioni coincidono con quelle del formulario.

L'A. a p.28 introduce il nostro sistema di numerazione e lo 0; ma manca la definizione nominale di questo segno.

A p.34 trovansi alcuni esorcizii alla 2ª sezione che possono essere utilmente tradotti in simboli.

$a, b, c, d \, \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset :$

4) $a > \mathrm{quot}(b, c) .=. ac > b$

5) $\mathrm{quot}(a, b) > \mathrm{quot}(c, d) .=. ad > bc$

6) identico a §quot P1·5 7) identico a §quot 1·51

8) $a > c . b < d . \supset . \mathrm{quot}(a,b) \geqq \mathrm{quot}(c,d)$

11) identico a §quot P1·2 12) trasformabile nella 11)

13) $c \times \mathrm{quot}(a,b) \leqq \mathrm{quot}(ac,b) \leqq [\mathrm{quot}(a,b)+1]c-1$

14) identico a §quot P1·3 15) complicata

16) $\mathrm{quot}(a,b) \times \mathrm{quot}(c,d) \leqq \mathrm{quot}(ab, cd) \leqq \mathrm{quot}(a,b)\,\mathrm{quot}(c,d) + \mathrm{quot}(a,b) + \mathrm{quot}(c,d)$.

17) complicato.

18) $\mathrm{quot}(a,b) + \mathrm{quot}(c,b) \leqq \mathrm{quot}(a+c,b) \leqq \mathrm{quot}(a,b) + \mathrm{quot}(c,b) + 1$

7) identico a §mlt 1·42. 8) $=$ §Σ P4·1 10) $=$ idem

La Sezione 3ª « Teoria analitica dei numeri razionali » si occupa delle operazioni su coppie di grandezze. Sono notevoli i teoremi: « Se un operazione su 3 grandezze é associativa, essa lo é pure su più grandezze ». « Essa é commutativa se lo é su due ». Essi sono seguiti da una serie di formule; ma la loro redazione completa in simboli presenta delle difficoltà.

A p.57 i numeri razionali sono indrodotti con una definizione che nel Formulario é detta « per astrazione ». Su questo punto, accennato in F1901 §/ P3 nota, giá si é parlato in RdM. t.1 p.262.

L'A dà la def1:

« All'insieme di due numeri naturali a,b con riguardo al loro ordine noi facciamo corrispondere un nuovo oggetto che si indica con a/b, e, dicesi **frazione** ».

Def2. « due di questi oggetti a/b e c/d diconsi eguali, se $a \times d = b \times c$. »

Def3... « si dice che $a/b > c/d$, quando $ad > bc$. »

Questa 3ª def. non é omogenea (F p.8). Come pure non é omogenea la Df del prodotto di due frazioni (§/5·2)

La def della somma è resa sensibilmente omogenea mediante un teorema precedente (p.59) ma è complicata.

A p.61 l'A. introduce i numeri negativi, facendoli dipendere da copple di numeri positivi, e imitando il processo seguito per introdurre gli irrazionali.

A p. 63 l'A. indica con $|a|$ il valor assoluto del numero a, e adduce ragioni per provare che questa notazione è più comoda della moda di Cauchy. Queste ragioni trovansi già esposte, e discusse nel F p.84 e la ragione per cui ivi si preferisce la notazione di Cauchy.

p.64 Teor. 1 = § mod 1·4

La regola dei segni (p.65) = F §× 6, non è assunta propriamente come definizione, ma conseguenza immediata della Df.

A p. 70 l'A. indroduce le radici quadrate, come nuovi enti senza parlare di irrazionali. Pare che ció corrisponda ad un bisogno sentito nelle scuole austriache, come lo é pure attualmente nelle scuole italiane. Poiché nei nuovi programmi di matematica pei Licei si fa al 2º anno la teoria delle radici, e al 3º la teoria dei numeri irrazionali.

Il nostro A. sviluppa la teoria con rigore; però le definizioni paiono un po' artificiose.

La sezione 4ª sviluppa sinteticamente la teoria dei numeri razionali, introducendo le « parti dell'unità ». A p.77 introduce i numeri negativi per una via che parmi difficile ridurre in simboli: le def. date dall'A. non soddisfano alle leggi delle definizioni simboliche. L'A. segue il nuovo principio di distinguere i segni + e — davanti ad un numero, dai segni per indicare l'addizione e la sottrazione. Invece di $-a$ scrive $\overline{a}$; e cita la notazione di Spitz (a con una freccia orizzontale), di Méray (con una freccia sovrapposta), di Padé ($a_n = a$ negativo). Nel F. si é seguita l'idea opposta, perché introducendo i numeri negativi, ed i fratti come operazioni, il valore dei segni + e — è lo stesso, sia nelle formule $b+a$, $b-a$, che nelle $+a$ e $-a$.

« Frazioni sistematiche » sono le frazioni corrispondenti alle decimali in una base qualunque.

Le ultime pagine si riferiscono al calcolo numerico sui numeri decimali. Altra recensione, dovuta al prof. Vivanti, trovasi nel « Bollettino di Bibliografia » giugno 1901 p.42.

G. Peano

SUR LA LOGIQUE DES RELATIONS

AVEC DES APPLICATIONS À LA THÉORIE DES SÉRIES

PAR

BERTRAND RUSSELL

Fellow of Trinity College, Cambridge.

TABLE DES MATIÈRES

§ 1. Théorie générale des Relations.
§ 2. Les nombres cardinaux.
§ 3. Les Progressions.
§ 4. Le fini et l'infini.
§ 5. Les séries condensées.
§ 6. Les séries fondamentales dans une série condensée.

La logique des relatives, telle qu'on la trouve chez MM. Peirce et Schröder, est difficile et compliquée à un si haut degré qu'il est possible de doûter de son utilité. Ces deux auteurs, puisqu'ils ne possèdent pas la distinction entre ε et $\supset$, regardent une classe comme une simple somme d'individus. Pour cette raison, une relation n'est pour eux qu'une somme de couples d'individus. Il en résulte que les propriétés fondamentales des relations s'expriment par des formules de sommation très longues, et dont la signification ne ressort pas très évidemment de la notation. C'est pourtant la logique des relations qui devrait servir comme fondement à la mathématique, puisque ce sont toujours des types de relations que l'on considère dans le raisonnement symbolique; c'est à dire, on ne doit pas considérer telle ou telle relation particulière, à l'exception de celles qui sont fondamentales pour la logique (comme ε et $\supset$), mais bien les relations d'une certaine classe — par exemple, les relations transitives et asymétriques, ou les relations univoques et réciproques. Je montrerai dans le présent mémoire qu'il est possible de simplifier énormément la logique des relations, en se servant de la méthode et de la notation de M. Peano, que je suppose connues dans ce qui suit. Cependant il paraît que la logique de M. Peano n'est guère complète sans l'introduction explicite des relations. Prenons comme exemple la définition de *fonction* (1). Les signes xu et ux, qui paraissent à droite dans cette définition, ne s'expliquent nullement par ce qui précède. La juxtaposition de deux lettres n'a reçu aucun sens excepté la mul-

(1) Formulaire, 1901, § 10, P1 · 0 · 01.

tiplication logique, qui n'est pas ici en question. Le fait est que la définition de *fonction* n'est possible que par le moyen d'un nouvelle idée primitive, savoir celle de *relation*. Qu'on remarque par exemple la conséquence suivante. De la définition citée, et des P §20 P9·4, §22 P2·4, §23 P1·02, P2·0, on déduit

$$a,b\varepsilon\, N_0 \;.\!\supset\!.\; a+b = ab = a\times b$$

Cette conséquence montre que la notation adoptée a besoin de modification. Je donnerai (§ 3, 4) une notation plus compliquée, de laquelle on ne peut pas tirer de pareilles conséquences. On verra du reste que l'introduction des relations donne lieu à une simplification et une généralisation de beaucoup de théories mathématiques; et elle nous permet de donner des définitions *nominales* partout où les définitions sont possibles.

Dans ce qui suit, j'ai adopté quelques uns des symboles de M. Schröder, par exemple, $\breve{R}$, 0', 1'. Je n'ai pas réussi à me conformer à la règle du Formulaire, de mettre tous les symboles sur une ligne, et dans le cas des relations il m'a fallu distinguer RP de R⌒P. Pour le reste, j'ai adopté tout ce qui se trouve dans la logique de M. Peano, ainsi que la notation Elm, suggérée par M. Padoa [RdM., VI, p. 117]; cependant j'ai distingué ϱu, où u est une classe contenue dans le domaine d'un relation R, de $\varrho\frown u$. Pour cette raison, le produit logique d'une classe u et d'une classe représentée par une lettre grecque est toujours indiqué par $\varrho\frown u$ ou $\pi\frown u$ etc., et non pas par ϱu ou $u\varrho$ [Voir § 1, Prop. 1·33·34·35·36].

§ 1.
Théorie générale des Relations.

✱ 1·0 Idée primitive: Rel = Relation.

·1 Rε Rel .⊃: xRy .=. x a avec y la relation R.

·21 Rε Rel .⊃. $\varrho = x\ni\{\exists y\ni(x\mathrm{R}y)\}$ Df

·22 Rε Rel .⊃. $\breve{\varrho} = x\ni\{\exists y\ni(y\mathrm{R}x)\}$ Df

Si R est une relation, ϱ est ce qu'on peut appeler le *domaine* de la relation R, c'est à dire, la classe des termes qui ont cette relation avec un terme quelconque ou avec plusieurs termes. J'emploie toujours (excepté pour les relations qui se trouvent dans le Formulaire) des lettres

majuscules pour les relations, et les lettres minuscules grecques correspondantes pour les domaines des relations. Dans les definitions ·21·22 la lettre R est supposée variable, c'est à dire, α sera le domaine d'une relation A, β d'une relation B, etc. Je regarde ɜ comme une idée primitive, de sorte que je me permets de mettre ce signe en avant de propositions non réduisibles sans son aide à la forme $x\varepsilon a$.

·31 $\mathrm{R}\varepsilon\,\mathrm{rel}\,.\,x\varepsilon\rho\,.\text{ɔ}.\,\breve{\rho}x = y\text{ɜ}(x\mathrm{R}y)$ Df

·32 $x\varepsilon\breve{\rho}\,.\text{ɔ}.\,\rho x = y\text{ɜ}(y\mathrm{R}x)$ Df

·33 $\mathrm{R}\varepsilon\,\mathrm{rel}.\,u\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,u\text{ɔ}\rho\,.\text{ɔ}.\,\breve{\rho}u = y\text{ɜ}\,\{\exists u \cap x\text{ɜ}(x\mathrm{R}y)\}$ Df

·34 $u\breve{\rho} = y\text{ɜ}\{x\varepsilon u\,.\text{ɔ}_x.\,x\mathrm{R}y\}$ Df

·35 $u\text{ɔ}\breve{\rho}\,.\text{ɔ}.\,\rho u = y\text{ɜ}\{\exists u\cap x\text{ɜ}(y\mathrm{R}x)\}$ Df

·36 $u\rho = y\text{ɜ}\{x\varepsilon u\,.\text{ɔ}_x.\,y\mathrm{R}x\}$ Df

·4 $\mathrm{R}\varepsilon\,\mathrm{rel}\,.\text{ɔ}.\,\exists\rho\,.=.\,\exists\breve{\rho}$

·5 $\exists\mathrm{R}\,.=.\,\exists\rho$ Df

·6 $\mathrm{R},\mathrm{R}'\varepsilon\,\mathrm{rel}\,.\text{ɔ}.\!\cdot.\,\mathrm{R}\text{ɔ}\mathrm{R}'\,.=:\,x\mathrm{R}y\,.\text{ɔ}_{x,y}.\,x\mathrm{R}'y$ Df

·61 $\mathrm{R}=\mathrm{R}'\,.=:\,\mathrm{R}\text{ɔ}\mathrm{R}'\,.\,\mathrm{R}'\text{ɔ}\mathrm{R}$ Df

·7 $\mathrm{R}\varepsilon\,\mathrm{rel}\,.\text{ɔ}.\,\exists\,\mathrm{rel}\cap\mathrm{R}'\text{ɜ}\,(x\mathrm{R}'y\,.=.\,y\mathrm{R}x)$ Pp

·71 $\mathrm{R}\varepsilon\,\mathrm{rel}\,.\text{ɔ}.\,\mathrm{rel}\cap\mathrm{R}'\text{ɜ}(x\mathrm{R}'y\,.=.\,y\mathrm{R}x)\ \varepsilon\ \mathrm{Elm}$

[$\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2\,\varepsilon\,\mathrm{rel}\cap\mathrm{R}'\text{ɜ}(x\mathrm{R}'y\,.=.\,y\mathrm{R}x)\,.\text{ɔ}.\!\cdot.\,x\mathrm{R}_1y\,.=.\,y\mathrm{R}x : x\mathrm{R}_2y\,.=.\,y\mathrm{R}x.\!\cdot.$
$\text{ɔ}: x\mathrm{R}_1y\,.=.\,x\mathrm{R}_2y : \text{ɔ}.\ \mathrm{R}_1=\mathrm{R}_2$]

·72 $\mathrm{R}\varepsilon\,\mathrm{rel}\,.\text{ɔ}.\,\breve{\mathrm{R}} = \text{ɿ}\,\mathrm{rel}\cap\mathrm{R}'\text{ɜ}(x\mathrm{R}'y\,.=.\,y\mathrm{R}x)$ Df

·8 $\exists\,\mathrm{rel}\cap\mathrm{R}\text{ɜ}(\rho = \iota x\,.\,\breve{\rho} = \iota y)$ Pp

Cette Pp est d'une grande importance, surtout dans l'arithmétique. Elle affirme qu'entre deux individus quelconques il y a une relation qui ne subsiste pas pour aucun autre couple d'individus. Elle n'a pas besoin d'hypothèse, puisque x et y ne sont sujets à aucune limitation. Cependant on peut la restreindre au cas où x et y sont différents, puisque le cas où x et y sont identiques se déduit de celui-ci par la multiplication relative (2·1).

·9 $\mathrm{R}\varepsilon\,\mathrm{rel}\,.\text{ɔ}.\,\breve{\breve{\mathrm{R}}} = \mathrm{R}$

[$x\breve{\breve{\mathrm{R}}}y\,.=.\,y\breve{\mathrm{R}}x\,.=.\,x\mathrm{R}y$]

·91 $\mathrm{R},\mathrm{S}\varepsilon\,\mathrm{rel}\,.\,\mathrm{R}=\breve{\mathrm{S}}\,.\text{ɔ}.\,\breve{\rho}=\sigma\,.\,\rho=\breve{\sigma}$

$\mathrm{R}=\breve{\mathrm{S}}\,.=.\,\breve{\mathrm{R}}=\mathrm{S}$

·93 $R_1, R_2 \varepsilon$ rel $.\supset\therefore x(R_1 \cup R_2)y \;.=:\; xR_1y \;.\cup.\; xR_2y$ Df

·94 $K \varepsilon$ Cls'rel $.\supset.\; \cup$'$K = R \ni \{xRy \;.=.\; \exists K \cap R' \ni (xR'y)\}$ Df

·95 $\cup$'$K \,\varepsilon$ rel Pp

·96 $R_1, R_2 \varepsilon$ rel $.\supset\therefore x(R_1 \cap R_2)y \;.=:\; xR_1y \,.\, xR_2y$ Df

·97 $K\varepsilon$ Cls'Rel $.\supset.\; \cap$'$K = R \ni \{xRy \;.=:\; R' \varepsilon K \;.\supset_{R'}.\; xR'y\}$ Df

·98 $\cap$'$K \,\varepsilon$ rel Pp

✱ 2·1 $R_1, R_2 \varepsilon$ rel $.\supset: x\, R_1R_2\, z \;.=.\; \exists y \ni (xR_1y \,.\, yR_2z)$ Df

·11 $R_1R_2 \,\varepsilon$ rel Pp

Il est nécessaire de distinguer $R_1 \cap R_2$, qui signifie le produit logique, de R_1R_2, qui signifie le produit relatif. On a $R_1 \cap R_1 = R_1$, mais non pas en général $R_1R_1 = R_1$; on a $R_1 \cap R_2 = R_2 \cap R_1$, mais on n'a pas en général $R_1R_2 = R_2R_1$. Par exemple, *grand père* est le produit relatif de *père* et *père*, ou de *mère* et *père*, mais pas de *père* et *mère*.

·12 $R\varepsilon$ rel $.\supset.\; R^2 = RR$ Df

·13 $R,S\varepsilon$ rel $.\supset.\; (\breve{RS}) = \breve{S}\breve{R}$

[$x(\breve{RS})y \;.=.\; yRSx \;.=.\; \exists z \varepsilon\, (yRz \,.\, zSx) \;.=.\; \exists z \varepsilon\, (x\breve{S}z \,.\, z\breve{R}y) \;.=.\; x\breve{S}\breve{R}y$]

·2 Transitif $=$ tr $=$ rel $\cap R \ni (R^2 \supset R)$ Df

Quand on a $R^2 \supset R$, on a $xRy \,.\, yRz \;.\supset.\; xRz$.

·3 $R\varepsilon$ rel $.\supset\therefore R^2 = R \;.=:\; xRz \;.=.\; \exists y \ni (xRy \,.\, yRz)$

Si R est une relation qui engendre une série (ce qui demande que R soit transitive et contenue dans la diversité), $R^2 = R$ donne la condition que cette série soit condensée (*überall dicht*), c'est à dire qu'elle possède un terme entre deux quelconques de ses termes (Voir le § 5).

·4 $R\varepsilon$ rel $.\supset: x\text{-}Ry \;.=.\; \text{-}(xRy)$ Df

·5 $\text{-}R \,\varepsilon$ rel Pp

·6 $(\text{-}\breve{R}) = \text{-}(\breve{R})$

Je n'ai pas trouvé nécessaire l'addition relative de MM. Peirce et Schröder. En voici la définition :

Soient R, S des relations : leur somme relative est une relation P, telle que

$xPy \;.=\therefore x\text{-}Rz \;.\supset_z.\; zSy : z\text{-}Sy \;.\supset_z.\; xRz$ Df

on a $xPy \;.=.\; \text{-}\exists(\text{-}\breve{\varrho}x \cap \text{-}\sigma y) \;.=.\; \text{-}\{x(\text{-}R\text{-}S)y\}$

✱ 3·1 $\varepsilon\, \varepsilon$ rel Pp

Cette Pp dit que ε est une relation. Dans ce cas, j'ai dû abandonner la règle d'employer des majuscules pour les relations.

·2 $e = x \ni \{\exists y \ni (x \varepsilon y)\}$ Df [$e =$ individu]

·3 $\breve{e} = x \ni \{\exists y \ni (y \varepsilon x)\}$ Df [$\breve{e} = \mathrm{Cls}\text{-}\iota\Lambda$]

·4 $\breve{e} \supset e$ [$y \varepsilon \breve{e} \;.\supset.\; y \varepsilon \mathrm{Cls} \;.\supset.\; y \varepsilon e$]

·5 $x \breve{\varepsilon} y .=. \exists z \ni (x \varepsilon z . y \varepsilon z)$

·51 $x \breve{\varepsilon} \varepsilon y .=. \exists z \ni (z \varepsilon x . z \varepsilon y) .=. x,y \varepsilon \mathrm{Cls} . \exists x y$

·6 $y \varepsilon \mathrm{Cls'Cls} .\supset. \cup' y = x \ni (x \varepsilon^2 y)$

·7 $\mathrm{R} \varepsilon \mathrm{rel} : x \varepsilon \varrho .\supset_x. y \ni (x \mathrm{R} y) = x :\supset. \mathrm{R} = \breve{\varepsilon}$

[$x \varepsilon \varrho .\supset_x : x\mathrm{R}y .=. y \varepsilon x .\supset.\cdot. \mathrm{R} = \breve{\varepsilon}$]

·8 $u,v \varepsilon \mathrm{Cls}-\iota\Lambda .\supset. \exists \mathrm{rel} \frown \mathrm{R} \ni (x\mathrm{R}y .=. x \varepsilon u . y \varepsilon v)$

[Prop 1·8 $.\supset. \exists \mathrm{rel} \frown \mathrm{P} \ni (\iota u = \pi . \iota v = \breve{\pi})$

$\mathrm{P} \varepsilon \mathrm{rel} . \iota u = \pi . \iota v = \breve{\pi} .\supset::$

$x \varepsilon u . y \varepsilon v .=_{x,y}. x(\varepsilon \mathrm{P} \breve{\varepsilon}) y .\cdot. x - \varepsilon u .\cup. y - \varepsilon v .=_{x,y}. -\{x(\varepsilon \mathrm{P} \breve{\varepsilon}) y\} ::\supset.$ Prop]

Cette proposition prouve que, si u, v sont deux classes non nulles, il y a une relation qui subsiste entre toute terme de u et toute terme de v, mais qui ne subsiste pas pour aucun autre couple de termes.

·81 $u \varepsilon \mathrm{Cls}-\iota\Lambda .\supset. \exists \mathrm{rel} \frown \mathrm{R} \ni (\varrho = u : x \varepsilon u .=_x. x\mathrm{R}u)$

[Prop 1·8 $.\supset. \exists \mathrm{rel} \frown \mathrm{P} \ni (\pi = \iota u . \breve{\pi} = \iota u) :\supset.\cdot.$
$x \varepsilon u .\supset_x. x(\varepsilon \mathrm{P}) u : x - \varepsilon u .\supset_x . -x(\varepsilon \mathrm{P}) u .\supset.\cdot.$ Prop]

·82 $u \varepsilon \mathrm{Cls}-\iota\Lambda .\supset. \varepsilon_u = \imath\, \mathrm{rel} \frown \mathrm{R} \ni (\varrho = u : x \varepsilon u .=_x. x\mathrm{R}u)$ Df

La relation ε_u est la relation ε pour la classe u seule. Elle est formée par le produit relatif de ε avec la relation qui subsiste seulement entre u et u.

✱ 4·1 *Idée primitive:* 1' = identité

Ce symbole est tiré de la notation de M. Schröder. Je n'emploie pas le symbole = pour l'identité des individus, puisqu'il a un autre usage pour l'équivalence des classes, des P, et des relations.

·2 $1' \varepsilon \mathrm{Rel}$ Pp

·3 $0' = -1'$ Df

0' est la diversité. Elle est une relation, en conséquence de Prop 2·5.

·31 $x\, 1'\, x$ Pp

·32 $1' \supset \breve{1}'$ Pp

·33 $\mathrm{R} \varepsilon \mathrm{rel} . x\mathrm{R}y . y\, 1'\, z .\supset. x\mathrm{R}z$ Pp

·34 $1'^2 \supset 1'$ [Prop 4·33 .ɔ. Prop]

·4 $1' = \breve{1}'$

[$x \breve{1}' y .=. y 1' x$ {1} {1} . Prop·32 $.\supset. x 1' y$ {2}
{2} $.\supset. \breve{1}' \supset 1'$ {3} {3} . Prop·32 .ɔ. Prop]

·41 $1'^2 = 1'$

[$x 1' y . y 1' y .\supset. x 1'^2 y :\supset. 1' \supset 1'^2$ {1}
{1} . Prop·34 .ɔ. Prop]

·42 $0' = \breve{0}'$

[Prop·3·4 .⊃. Prop]

·5 R,Pε rel .⊃: R$\breve{P}$ ⊃ 0' .=. $\breve{R}$P ⊃ 0'

[R$\breve{P}$ ⊃ 0' .=: xRy . $y\breve{P}z$.⊃$_{x,y,z}$. x0'z :

=. −∃ $(x,y)\ni(x\text{R}y \,.\, y\breve{\text{P}}x)$.

=. −∃ $(x,y)\ni(y\breve{\text{R}}x \,.\, x\text{P}y)$.

=: $y\breve{\text{R}}x$. xPz .⊃$_{x,y,z}$. y0'z :=. $\breve{\text{R}}$P ⊃ 0']

✱ 5·1 Nc→1 = Rel ∩ R∋{xRy . xRz .⊃$_x$. y1'z} Df

·11 1→Nc = Rel ∩ R∋{yRx . zRx .⊃$_x$. y1'z} Df

·2 Rε Nc→1 .=. $\breve{\text{R}}\varepsilon$ 1→Nc

·3 1→1 = (Nc→1)∩(1→Nc) Df

Nc→1 est la classe des relations univoques. Le symbole Nc→1 indique que, si on a xRy, quand x est donné, il n'y a qu'un y possible, mais que, quand y est donné, il y a un nombre cardinal quelconque de x qui satisfont à la condition xRy. De même 1→Nc est la classe des converses des relations univoques, et 1→1 est la classe des relations univoques et réciproques.

·31 Nc→1 = Rel ∩ R∋($x\varepsilon\varrho$ ⊃.$_x$. $\breve{\varrho}x$ ε Elm)

·32 1→Nc = Rel ∩ Rε($x\varepsilon\breve{\varrho}$.⊃$_x$. ϱx ε Elm)

·4 1'ε 1→1

[Prop 4·34·4 .⊃. Prop]

·5 Rε 1→1 .⊃. $\breve{\text{R}}$ ε 1→1

·6 Rε 1→Nc .⊃. R$\breve{\text{R}}$ ⊃ 1'

On n'a pas R$\breve{\text{R}}$=1', puisque le domaine de R$\breve{\text{R}}$ et le même que celui de R, qui n'est en général qu' une partie du domaine de 1'.

[xR$\breve{\text{R}}y$.⊃. ∃$z\ni(x,y\varepsilon\ \varrho\ z)$: Rε 1→Nc .⊃. ϱz ε Elm .·.⊃. Prop]

·7 R,Sε1→1 .⊃. RS ε 1→1

·8 R,Sε Nc→1 . $u\varepsilon$ Cls . u⊃ϱ . $\breve{\varrho}u$ ⊃σ . RS = P .⊃. $\breve{\sigma}(\breve{\varrho}u) = \breve{\pi}u$

[$x\varepsilon u$. y 1' $\imath x\breve{\varrho}$.⊃. $y\varepsilon\sigma$.⊃: z 1' $\imath y\breve{\sigma}$.⊃. xRSz .·.⊃. $\breve{\sigma}(\breve{\varrho}u)$ ⊃ $\breve{\pi}u$ {1}

$x\varepsilon u$. xRSz .⊃. ∃ σ∩ $y\ni(x\text{R}y \,.\, y\text{S}z)$.⊃. $y\varepsilon\breve{\varrho}u$. $z\varepsilon\ \breve{\sigma}(\breve{\varrho}u)$:

⊃. $\breve{\pi}u$ ⊃ $\breve{\sigma}(\breve{\varrho}u)$ {2}

{1} . {2} .⊃. Prop]

✱ 6·1 $S \varepsilon \mathrm{Nc}\to 1 . R = S\breve{S} .\supset. R^2 \supset R . R = \breve{R}$

[$xRz .=. \exists\, y \ni (xSy . zSy)$ |1|

$zRw .=. \exists\, v \ni (zSv . wSv)$ |2|

$S \varepsilon \mathrm{Nc}\to 1 . zSy . zSv .\supset. y 1' v$ |3|

|1|.|2|.|3| $.\supset: xRz . zRw .\supset. \exists\, y \ni (xSy . wSy) .\supset. xRw :\supset. R^2 \supset R$ |4|

$xRz .=. \exists\, y \ni (xSy . zSy) .=. \exists\, y \ni (zSy . xSy) .=. zRx :\supset. \breve{R} = R$ |5|

|4|.|5| $.\supset.$ Prop]

·2 $R \varepsilon \mathrm{rel} . R^2 \supset R . R = \breve{R} . \exists R .\supset. \exists\, \mathrm{Nc}\to 1 \cap S \ni (R = S\breve{S})$

[$xSu .=. x \varepsilon \varrho . u = \breve{\varrho} x :\supset:$

$xSu . ySu .=. x,y \varepsilon \varrho . u = \breve{\varrho} x = \breve{\varrho} y .\supset. xRy :\supset. S\breve{S} \supset R$ |1|

$R^2 \supset R . R = \breve{R} . \exists R .\supset: x \varepsilon \varrho .\supset_x . x \varepsilon \breve{\varrho} x$ |2|

|2| . Hp|1| $.\supset: xRy .\supset. x,y \varepsilon \breve{\varrho} x .\supset. x\breve{S}\varrho x . y\breve{S}\varrho x .\supset. xS\breve{S}y :\supset. R \supset S\breve{S}$ |3|

|1| . |3| $.\supset.$ Prop]

La P 6·2 est la converse de la P 6·1. Elle affirme que toute relation transitive et symétrique et non nulle peut être analysée comme produit d'une relation univoque et de son converse, et la demonstration donne une façon dont ceci peut se faire, sans prouver qu' il n'y a pas d'autres façons de la faire. La P 6·2 est présupposée dans les définitions par abstraction, et elle montre qu'en général ces definitions ne donnent pas un seul individu, mais une classe, puisque la classe des relations S n'est pas en général un élement. Pour chaque relation S de cette classe, et pour tout terme x de R, il y a un individu qu'indique la définition par abstraction; mais les autres relations S de cette classe ne donnent pas en général le même individu. Ceci s'expliquera mieux dans les applications, par exemple dans le § prochain. Cependant on peut toujours prendre la classe $\breve{\varrho} x$, qui paraît dans la démostration de Prop 6·2, comme l'individu indiqué par la définition par abstraction; ainsi par exemple le nombre cardinal d'una classe u serait la classe des classes semblables à u.

§ 2.

Les nombres cardinaux.

✱ 1·1 $u,v \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: u \,\mathrm{sim}\, v .=. \exists\, 1\to 1 \cap R \ni (u \supset \varrho . \breve{\varrho}\, u = v)$ Df

Pour la définition de $\breve{\varrho}\, u$, voir § 1 Prop 1·33.

·11 sim ε rel Pp

Pour affirmer qu'un terme de valeur constante, tel que « sim », appartient à telle ou telle classe, on a toujours besoin d'une Pp quelconque.

|3|

|4|

...s qui forment
...lables (sim),
...cette classe de
... toute entière à
...ent la théorie des
... oir le § 4).

) . ∃Cls*w*ɜ ∩ (*w*sim*v* . *w*ↄ*u*)

Df

Df

Λ

]

|1|

Df

.]

Elm

1→1 ∩ Rɜ(*u*ↄϱ . ϱ̆*u* = ι*x*)

. ϱ̆*u* = ι*x* .ↄ: *y*,*z*ɛ*u* .ↄ. *y*R*x* . *z*R*x* .ↄ. *y*1'*z* .ↄ. *u*ɛ Elm]

Elm .ↄ. *u* sim *v*

. *x*ɛ*u* .ↄ. *u* sim ι*x* |1|

. *y*ɛ*v* .ↄ. *v* sim ι*y* |2|

2| . Prop 2·5 .ↄ. Prop]

1_σ = ῑσ ∩ *x*ɜ(*u*ɛ Elm .ↄ$_u$. *u*S*x*) Df

3·1 Rɛ rel . *u*ↄϱ . ∃*u* .ↄ.
∃ rel ∩ R'ɜ{ϱ'=*u* : *x*R'*y* .=$_{x,y}$. *x*ɛ*u* . *x*R*y*}

Hp . §1 Prop 3·8 .ↄ. ∃ rel ∩ R''ɜ{ϱ'' = *u* . ϱ̆'' = ϱ̆*u* : *x*ɛ*u* . *y*ɛϱ̆*u* .=$_{x,y}$. *x*R''*y*}
R''ɛrel : *x*R''*y* .=$_{y,x}$. *x*ɛ*u* . *y*ɛϱ̆*u* : R∩R'' = R' :ↄ:
*x*R'*y* .=. *x*ɛ*u* . *y*ɛ ϱ̆*u* . *x*R*y* .=. *x*ɛ*u* . *x*R*y* :ↄ. Prop]

·11 Rɛ rel . *u*ↄϱ .ↄ. rel ∩ R'ɜ {*x*R'*y* .=. *x*ɛ*u* . *x*R*y*} ɜElm
[R_1,R_2ɛrel∩R'ɜ{*x*R'*y* .=. *x*ɛ*u* . *x*R*y*} .ↄ: *x*R_1*y* .=. *x*ɛ*u* . *x*R*y* .=. *x*R_2*y* :ↄ. Prop]

Les P·1·11 montrent qu'on peut toujours trouver une relation dont le domaine est une portion limitée de celui d'une relation donnée, et qui est équivalente à la relation donnée dans cette portion..

·2 $u \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset . u \operatorname{sim} u$

[$1' \varepsilon 1 \dashv 1 : \mathrm{R} = 1' . \supset . u \supset \varrho . \breve{\varrho} u = u :\supset.$ Prop]

·21 $u, v \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset : u \operatorname{sim} v .=. v \operatorname{sim} u$

[§ 1 Prop 5·5 .ɔ. Prop]

·22 $u, v, w \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: u \operatorname{sim} v . v \operatorname{sim} w .\supset. u \operatorname{sim} w$

[§ 1 Prop 5·7 .ɔ. Prop.]

·3 $\exists\ \mathrm{Nc} \dashv 1 \frown \mathrm{S} \ni (\operatorname{sim} = \mathrm{S}\breve{\mathrm{S}})$

[1.11·2·21·22. § 1 Prop 6·2 .ɔ. Prop]

·4 $\mathrm{g} = \mathrm{Nc} \dashv 1 \frown \mathrm{S} \ni (\operatorname{sim} = \mathrm{S}\breve{\mathrm{S}})$ Df

Voir la note à la fin du § 1. Si l'on veut définir le nombre cardinal par abstraction, on ne peut définir qu'une classe de classes, dont chacune a une correspondance univoque et réciproque avec la classe « nombre cardinal, » et à laquelle appartient chaque classe qui a une telle correspondance. Ceci résulte des propositions suivantes (·52 et ·54),

·5 $\mathrm{S} \varepsilon \mathrm{g} .\supset. \sigma = \mathrm{Cls} [\operatorname{sim} = \mathrm{S}\breve{\mathrm{S}} : u \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset_u . u \operatorname{sim} u :\supset. u \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset_u . \exists\, x \ni (u \mathrm{S} x)]$

·51 $\mathrm{S,S'} \varepsilon \mathrm{g} .\supset. \mathrm{S}\breve{\mathrm{S}}' \varepsilon 1 \dashv 1$

[$x\mathrm{S}\breve{\mathrm{S}}'y . x\mathrm{S}\breve{\mathrm{S}}'y' .=. \exists\ \mathrm{Cls} \frown u \ni (u\mathrm{S}x . u\mathrm{S}\, y) . \exists\ \mathrm{Cls} \frown u' \ni (u'\mathrm{S}x . u'\mathrm{S}'y')$ |1|

$u\mathrm{S}x . u'\mathrm{S}x .\supset. u \operatorname{sim} u' .\supset. u\ \mathrm{S}'\breve{\mathrm{S}}'u' .\supset. \exists\ y'' \ni (u\mathrm{S}'y'' . u'\mathrm{S}'y'')$ |2|

|1| . |2| . $\mathrm{S,S'} \varepsilon \mathrm{Nc} \dashv 1 .\supset. y 1' y'' . y' 1' y'' .\supset. y 1' y' .\supset. \breve{\mathrm{S}}\mathrm{S}' \varepsilon \mathrm{Nc} \dashv 1$ |3|

|3| $.\supset. \breve{\mathrm{S}}'\mathrm{S} \varepsilon \mathrm{Nc} \dashv 1 .\supset. \breve{\mathrm{S}}\, \mathrm{S}' \varepsilon 1 \dashv \mathrm{Nc}$ |4| |3|.|4| .ɔ. Prop]

·52 $\mathrm{S,S'} \varepsilon \mathrm{g} .\supset. \breve{\sigma} \operatorname{sim} \breve{\sigma}'$

[$x \varepsilon \breve{\sigma} .\supset. \exists\ \mathrm{Cls} \frown u \ni (u\mathrm{S}x)$ |1|

Prop 1·5 . $u \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset. \exists\ \sigma' \frown y \ni (u\mathrm{S}'y)$ |2|

|1| . |2| $.\supset: x \varepsilon \breve{\sigma} .\supset_x . \exists \breve{\sigma}' \frown y \ni (x\breve{\mathrm{S}}\mathrm{S}'y)$ |3|

|3| $.\supset: y \varepsilon \breve{\sigma}' .\supset_y . \exists \breve{\sigma} \frown x \ni (x\breve{\mathrm{S}}\mathrm{S}'y)$ |4|

|3| . |4| . Prop 5·1 .ɔ. Prop]

·53 $\mathrm{S} \varepsilon \mathrm{rel} . \mathrm{R} \varepsilon 1 \dashv \mathrm{Nc} . \breve{\sigma} \supset \varrho .\supset. \mathrm{S}\mathrm{R}\breve{\mathrm{R}}\breve{\mathrm{S}} = \mathrm{S}\breve{\mathrm{S}}$

[$\breve{\sigma} \supset \varrho .\supset: x\mathrm{S}y .\supset_{x,y} . \exists z \ni (y\mathrm{R}z)$ |1|

$\mathrm{R} \varepsilon 1 \dashv \mathrm{Nc} .\supset: y\mathrm{R}z . z\breve{\mathrm{R}}y' .\supset. y 1' y'$ |2|.

|1| . |2| $.\supset. \mathrm{S}\mathrm{R}\breve{\mathrm{R}} = \mathrm{S}1'$ |3|

|3| . § 1 Prop 4·33 $.\supset. \mathrm{S}\mathrm{R}\breve{\mathrm{R}} = \mathrm{S} .\supset.$ Prop]

·54 $\mathrm{S} \varepsilon \mathrm{g} . k \operatorname{sim} \breve{\sigma} .\supset. \exists\ \mathrm{g} \frown \mathrm{S}' \ni (k = \breve{\sigma}')$

[$k \operatorname{sim} \breve{\sigma} .=. \exists\ 1 \dashv 1 \frown \mathrm{R} \ni (k \supset \breve{\varrho} . \varrho k = \breve{\sigma})$ |1|

|1| . Prop 1·5 $.\supset: u \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset_u . \exists\ k \frown x \ni (u \mathrm{SR} x)$ |2|

$S\varepsilon\, Nc{+}1 \,.\, R\varepsilon{+}1 \,.\!\supset\!:\, SR\, \varepsilon\, Nc{+}1$ |3|

Prop ·53 $.\!\supset.\, SR\breve{RS} = S\breve{S} = sim$ |4|

|2| . |3| . |4| . ɔ . Prop]

Les propositions ·52 et ·54 prouvent que toutes les classes qui forment les domaines des différentes relations de la classe g sont semblables (sim), et que toute classe semblable à l'une d'elles appartient à cette classe de classes. L'arithmétique des nombres cardinaux s'applique toute entière à chacune de ces classes; mais pour développer complètement la théorie des nombres finis, on a besoin de l'induction complète. (Voir le § 4).

✱ 2. $S\varepsilon g\, .\!\supset\!::$

·1 $u,v\varepsilon\, Cls \,.\!\supset\!:\, \breve{\imath\sigma} u > \breve{\imath\sigma} v \,.=.\, -(u\,sim\,v) \,.\, \exists Cls\, w \ni (w\,sim\,v \,.\, w\supset u)$ Df

·2 $\breve{\imath\sigma} u < \breve{\imath\sigma} v \,.=.\, \breve{\imath\sigma} v > \breve{\imath\sigma} u$ Df

·3 $u = \Lambda \,.\, v = \Lambda \,.\!\supset.\, u\, sim\, v$

[$R\varepsilon\, 1{+}1 \,.\, u = \Lambda \,.\!\supset.\, u \supset \varrho \,.\, \breve{u\varrho} = \Lambda$ |1|

|1| $.\, v = \Lambda$. Prop 1·1 .ɔ. Prop]

·4 $0\sigma = \breve{\imath\sigma}\Lambda$ Df

·5 $\iota x\, sim\, \iota y$

[§1 Prop 1·8 .ɔ. Prop]

·6 $u\, sim\, \iota x \,.\!\supset\!:\, u\varepsilon\, Elm$

[u sim $\iota x \,.=.\, \exists\, 1{+}1 \frown R\ni(u\supset\varrho \,.\, \breve{\varrho} u = \iota x)$

$R\varepsilon 1{+}1 \,.\, u\supset\varrho \,.\, \breve{\varrho} u = \iota x \,.\!\supset\!:\, y,z\varepsilon u \,.\!\supset.\, yRx \,.\, zRx \,.\!\supset.\, y1'z \,.\!\supset.\, u\varepsilon$ Elm]

·61 $u,v\, \varepsilon\, Elm \,.\!\supset.\, u\, sim\, v$

[$u\varepsilon$ Elm . $x\varepsilon u \,.\!\supset.\, u$ sim ιx |1|

$v\varepsilon$ Elm . $y\varepsilon v \,.\!\supset.\, v$ sim ιy |2|

|1|. |2| . Prop 2·5 .ɔ. Prop]

·7 $1_\sigma = \breve{\imath\sigma} \frown x\ni(u\varepsilon\, Elm \,.\!\supset_u.\, uSx)$ Df

✱ 3·1 $R\varepsilon\, rel \,.\, u\supset\varrho \,.\, \exists u \,.\!\supset.$
$\exists\, rel \frown R'\ni\{\varrho' = u : xR'y \,.=_{x,y}.\, x\varepsilon u \,.\, xRy\}$

Hp . §1 Prop 3·8 .ɔ. $\exists$ rel$\frown R''\ni\{\varrho'' = u \,.\, \breve{\varrho}'' = \breve{\varrho} u : x\varepsilon u \,.\, y\varepsilon \breve{\varrho} u \,.=_{x,y}.\, xR''y\}$

$R''\varepsilon rel : xR''y \,.=_{y,x}.\, x\varepsilon u \,.\, y\varepsilon\breve{\varrho} u : R\frown R'' = R' \,:\!\supset\!:$

$xR'y \,.=.\, x\varepsilon u \,.\, y\varepsilon\, \breve{\varrho} u \,.\, xRy \,.=.\, x\varepsilon u \,.\, xRy \,:\!\supset.$ Prop]

·11 $R\varepsilon\, rel \,.\, u\supset\varrho \,.\!\supset.\, rel \frown R'\ni\{xR'y \,.=.\, x\varepsilon u \,.\, xRy\}\ \varepsilon$Elm

[$R_1, R_2 \varepsilon\, rel\frown R'\ni\{xR'y \,.=.\, x\varepsilon u \,.\, xRy\} \,.\!\supset\!:\, xR_1y \,.=.\, x\varepsilon u \,.\, xRy \,.=.\, xR_2y \,:\!\supset.$ Prop]

Les P·1·11 montrent qu'on peut toujours trouver une relation dont le domaine est une portion limitée de celui d'une relation donnée, et qui est équivalente à la relation donnée dans cette portion.

·12 $R \varepsilon \mathrm{rel} \,.\, u \supset \varrho \,.\supset.\, R_u = \iota\, \mathrm{Rel} \cap R' \ni \{x R' y \,.=.\, x \varepsilon u \,.\, x R y\}$ Df

·2 $u, u' \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u \;\mathrm{sim}\; u' \,.\supset.\, \exists\, 1{+}1 \cap R \ni (u = \varrho \,.\, u' = \breve{\varrho})$

[$u \;\mathrm{sim}\; u' \,.\supset.\, \exists\, 1{+}1 \cap R \ni (u \supset \varrho \,.\, \breve{\varrho} u = u)$ |1|
|1| . Prop3·1 .ↄ. Prop]

·3 $u, v, u', v' \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, uv = \Lambda \,.\, u'v' = \Lambda \,.\, u \;\mathrm{sim}\; u' \,.\, v \;\mathrm{sim}\; v' \,.\supset.$
$u \cup v \;\mathrm{sim}\; u' \cup v'$

[$u \;\mathrm{sim}\; u' \,.\,$ Prop·2 $.\supset.\, \exists\, 1{+}1 \cap R \ni (u = \varrho \,.\, u' = \breve{\varrho})$
$v \;\mathrm{sim}\; v' \,.\,$ Prop·2 $.\supset.\, \exists\, 1{+}1 \cap R' \ni (v = \varrho' \,.\, v' = \breve{\varrho}')$
$uv = \Lambda \,.\, u'v' = \Lambda \,.\, P = R \cup R' \,.\supset.\, \pi = u \cup v \,.\, \breve{\pi} = u' \cup v' \,.\, P \varepsilon 1{+}1 \,.\supset.$ Prop]

·4 $k \varepsilon \mathrm{Cls}'\, 1{+}1 : R_1, R_2 \varepsilon k \,.\, R_1\, 0'\, R_2 \,.\supset_{R_1, R_2} .\, \varrho_1 \cap \varrho_2 = \Lambda \,.$
$\breve{\varrho}_1 \cap \breve{\varrho}_2 = \Lambda :\supset.\, \cup' k \;\varepsilon\; 1{+}1$

[$x (\cup' k) y \,.=.\, \exists\, k \cap R \ni (x R y) \,.\supset.\, \exists\, k \cap R \ni (x \varepsilon \varrho)$
$R_1, R_2 \varepsilon k \,.\, R_1\, 0'\, R_2 \,.\supset_{R_1, R_2} .\, \varrho_1 \cap \varrho_2 = \Lambda :\supset: \exists\, k \cap R \ni (x \varepsilon \varrho) \,.\supset_x .\; k \cap R \ni (x \varepsilon \varrho) \;\varepsilon\; \mathrm{Elm} :$
$\supset.\cdot.\, R \varepsilon k \,.\, x \varepsilon \varrho \,.\supset: x (\cup' k) y \,.=.\, x R y \,.\cdot.\supset.$ Prop]

3·41 $R \varepsilon 1{+}1 \,.\, \varrho, \breve{\varrho} \;\varepsilon\; \mathrm{Cls}'\mathrm{Cls} : x R y \,.\supset_{x,y} .\, x \;\mathrm{sim}\; y :$
$x, x' \varepsilon \varrho .\, x 0' x' .\supset_{x,x'} .\, x x' = \Lambda : y, y' \varepsilon \breve{\varrho} \,.\, y 0' y' .\supset_{y,y'} .\, \varrho \varrho' = \Lambda :\supset.\, \cup' \varrho \;\mathrm{sim}\; \cup' \breve{\varrho}$

[$x R y \,.\supset^{x,y} .\, x \;\mathrm{sim}\; y :\supset: x R y \,.\supset.\, \exists\, 1{+}1 \cap R' \ni (x = \varrho' \,.\, y = \breve{\varrho}')$.
$x \varepsilon \varrho \,.\supset_x .\, R_x \varepsilon\, 1{+}1 \cap R' \ni (x = \varrho' \,.\, \breve{\iota \varrho x} = \breve{\varrho}') : k = 1{+}1 \cap R'' \ni \{\exists \varrho \cap x \ni (R'' 1' R_x)\} :$
$P = \cup' k \,.\,$ Prop 3·4 $:\supset.\, P \varepsilon 1{+}1 \,.\, \pi = \cup' \varrho \,.\, \breve{\pi} = \cup' \breve{\varrho} \,.\supset.$ Prop]

Cette proposition donne le fondement de d'addition arithmétique, sous une forme qui permet l'addition d'un nombre infini de nombres soit finis, soit infinis.

3·5 $u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, x, y \varepsilon u \,.\supset.\, u - \iota x \;\mathrm{sim}\; u - \iota y$
[$u - \iota x - \iota y \;\mathrm{sim}\; u - \iota x - \iota y \,.\, \iota x \;\mathrm{sim}\; \iota y \,.\,$ Prop 3·3 .ↄ. Prop]

·51 $u, v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u \;\mathrm{sim}\; v \,.\, x \varepsilon u \,.\, y \varepsilon v \,.\supset.\, u - \iota x \;\mathrm{sim}\; v - \iota y$

[$R \varepsilon 1{+}1 \,.\, u = \varrho \,.\, v = \breve{\varrho} \,.\, x R y \,.\supset.$ Prop |1|
$R \varepsilon 1{+}1 \,.\, u = \varrho \,.\, v = \breve{\varrho} \,.\, -(x R y) \,.\supset.\cdot.\, \exists\, v \cap z \ni (x R z) : x R z \,.\supset_x .\, y 0' z \,.\cdot.$
$\supset.\, u - \iota x \;\mathrm{sim}\; v - \iota z$ |2|
Prop3·5 $.\supset.\, v - \iota z \;\mathrm{sim}\; v - \iota y$ |3|
|1|.|2|.|3| .ↄ. Prop]

·52 $u, v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, x \varepsilon u \,.\, y \varepsilon v \,.\supset: u \;\mathrm{sim}\; v \,.=.\, u - \iota x \;\mathrm{sim}\; v - \iota y$

✱ 4. $\mathrm{S}\varepsilon \mathrm{g} .\supset::$

·1 $m,n\varepsilon\breve{\sigma} .\supset. m+n = \breve{\iota\sigma} \frown x\ni\{u\mathrm{S}m . v\mathrm{S}n . uv=\Lambda .\supset_{u,v}. u\cup v\, \mathrm{S}x\}$ Df

Cette définition dépend de Prop 3·3.

·2 $k\supset\breve{\sigma} .\supset. \Sigma k = \breve{\iota\sigma} \frown p\ni\{u\varepsilon\, \mathrm{Cls'Cls} . u \,\mathrm{sim}\, k : x,y\varepsilon u .\supset_{x,y}. xy=\Lambda$

$: \exists\, 1\rightarrow 1 \frown \mathrm{R}\ni(u=\varrho . k=\breve{\varrho} : x\varepsilon u . x\mathrm{R}y .\supset_x. x\mathrm{S}y) :\supset_u. \cup' u\, \mathrm{S}p\}$

Df

Cette définition depend de Prop 3·41. Il importe d'observer qu'elle définit la somme d'une classe finie ou infinie de nombres finis ou infinis ; mais qu'il faut que tous les nombres soient différents, car sinon, on ne peut les définir comme une classe de nombres, mais seulement comme nombres de classes. Pour le cas où il y a des nombres égaux dans la sommation, il faut des considérations différentes, et surtout la multiplication, que je ne développe pas ici, pour éviter les longueurs.

·3 $1_\sigma 0' 0_\sigma$

$[u\mathrm{S}1\sigma .\supset. u\varepsilon\, \mathrm{Elm} : v\mathrm{S}0\sigma .\supset. v=\Lambda : \Lambda -\varepsilon\, \mathrm{Elm} :\supset. \mathrm{Prop}]$

Cette proposition prouve que pour une relation quelconque de la classe S, 1σ diffère de 0σ.

·4 $x\varepsilon\breve{\sigma} .\supset. x+1_\sigma = \breve{\iota\sigma} \frown y\ni\{u\mathrm{S}x . z-\varepsilon u .\supset_{u,z}. u\cup\iota z\, \mathrm{S}y\}$ Df

·41 $x\varepsilon\breve{\sigma}-\iota 0_\sigma .\supset. x-1_\sigma = \breve{\iota\sigma} \frown y\ni\{u\mathrm{S}x . z\varepsilon u .\supset_{u,z}. u-\iota z\mathrm{S}y\}$ Df

Cette définition dépend de Prop 3·51.

4·5 $x\varepsilon\, \breve{\sigma}-\iota 0_\sigma . \supset: x-1_\sigma 1' x .=. x 1' x+1_\sigma$

$[\ x-1\sigma\ 1'\ x\ .\ u\mathrm{S}\ x-1\sigma\ .\ v\mathrm{S}x\ .\supset.\ u\ \mathrm{sim}\ v$ $\{1\}$

$\{1\}$. Prop 3·52 $.\supset.\because z-\varepsilon u . w-\varepsilon v .\supset: u \,\mathrm{sim}\, v .=. u\cup\iota z\, \mathrm{sim}\, v\cup\iota w .\therefore$

$\supset: x-1\sigma\ 1'\ x .=. x\ 1'\ x+1\sigma\ ]$

·6 $x\varepsilon\, \breve{\sigma}-\iota 0_\sigma .\supset: x-1_\sigma 0' x .=. x\, 0' x+1_\sigma$

[·5 . Transp .⊃. Prop]

Les propositions ·5 et ·6 prouvent que si le nombre d'une classe est identique au nombre de la classe qu'on obtient en ôtant un terme à la classe donnée, alors ce nombre est aussi identique au nombre de la classe qu'on obtient eu ajoutant un terme à la classe donnée, et viceversa. Puisque nous avons prouvé (4·3) que 1σ est différent de 0σ, nons avons les moyens pour prouver que dans la classe des nombres qui obéissent à l'induction complete, en partant de 0σ, deux nombres successifs ne sont jamais égaux. Mais avant de développer ce sujet, il faut examiner la théorie des progressions, c'est-à-dire, des séries dont le nombre ordinal est ω.

§ 3.

Les progressions.

$*$ 1.1 $\omega = \mathrm{Cls} \cap u \ni \{ \exists 1\!\rightarrow\!1 \cap \mathrm{R} \ni (u \supset \varrho \,.\, \breve{\varrho} u \supset u \,.\, \exists\, u - \breve{\varrho} u :$

$s \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, \exists\, su - \breve{\varrho} u \,.\, \breve{\varrho}(su) \supset s \,.\supset_s .\, u \supset s \}$ Df

Ceci est une définition du nombre ordinal ω, ou bien, si l'on veut, une définition de la classe des classes dénombrables. Les nombres ordinaux sont en effe des classes de séries. La classe ω est la plus simple des classes de séries infinies. Puisque la définition ne présuppose pas les nombres, il sera bon de donner à ce type de séries un nom qui n'implique pas les nombres. Je l'appellerai donc la classe des *progressions*. Voici la définition en mots : ω est la classe des classes u telles qu'il y a une relation univoque et réciproque R telle que u est contenue dans le domaine de R, et que la classe des termes auxquels les différents u ont la relation R est contenue dans u, sans être identique avec u, et que, si s est une classe quelconque à laquelle appartient au moins un des termes de u auxquels aucun u n'a la relation R, et à laquelle appartient tout terme de u auquel un terme de la partie commune de u et s a la relation R, alors la classe u est contenue dans la classe s.

·11 $\mathrm{R}\varepsilon 1\!\rightarrow\!1 \,.\, \breve{\varrho} \supset \varrho \,.\, \exists\, \varrho - \breve{\varrho} \,.\, \supset .$

$\omega_\varrho = u \ni \{ u \supset \varrho \,.\, \breve{\varrho}\, u \supset u \,.\, \exists\, u - \breve{\varrho} u : s \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, \exists\, su - \breve{\varrho} u \,.\, \breve{\varrho}(su) \supset s \,.\supset_s .\, u \supset s \}$ Df

ω_ϱ est la classe des progressions dont R est la relation génératrice.

·12 $u \varepsilon \omega \,.\supset .\, \mathrm{Rel}_u = 1\!\rightarrow\!1 \cap \mathrm{R} \ni (u \varepsilon\, \omega_\varrho)$ Df

·13 $\mathrm{Induct} \,.=\!\because\, u \varepsilon \omega \,.\, \mathrm{R} \varepsilon \mathrm{Rel}_u \,.\supset : s \varepsilon \mathrm{Cls} .\, \exists\, su - \breve{\varrho} u \,.\, \breve{\varrho}\,(su)$
$\supset s \,.\supset_s \cdot\, u \supset s$ Df

·2 $u \varepsilon \omega \,.\, \mathrm{R} \varepsilon \mathrm{Rel}_u \,.\supset .\, u - \breve{\varrho} u \;\varepsilon\, \mathrm{Elm}$

[$x \varepsilon\, u - \breve{\varrho} u \,.\, s = \iota x \cup \breve{\varrho} u \,.\supset .\, \breve{\varrho}(su) \supset s \,.\, \exists su - \breve{\varrho} u$ |1|

|1| . Induct $.\supset.\; u \supset s \;.\supset.\; u \supset \iota x \cup \breve{\varrho} u \;.\supset.\; u - \breve{\varrho} u \supset \iota x \;.\supset.$ Prop]

$\mathrm{R} \varepsilon\, 1\!\rightarrow\!1 \,.\, \breve{\varrho} \supset \varrho \,.\, \exists \varrho - \breve{\varrho} \,.\, u \varepsilon \omega_\varrho \,.\supset ::$

·3 $\mathrm{O}_u = \text{℩}(u - \breve{\varrho} u)$ Df

·31 $x \varepsilon u \,.\supset .\, \mathrm{seq} x = \iota \breve{\varrho} x$

·4 $\mathrm{P} \varepsilon \mathrm{Rel} \,.\supset .\, \mathrm{PO}_u = 1'_\pi$ Df

·5 $\mathrm{P} \varepsilon \mathrm{Rel} \,.\, n \varepsilon u \,.\supset .\, \mathrm{Pseq} n = \mathrm{P} n \mathrm{P}$ Df

Les P 1·4·5 définissent par induction les puissances finies des relations. Cette définition s'effectue au moyen des termes de u. Dans la théorie des

progressions on ne peut se passer des puissances des relations; donc, si l'on veut rendre cette théorie indépendante des nombres, il faut définir les puissances d'une manière qui n'introduit pas de nombres. Le symbole $1'\pi$ signifie l'identité dans la classe π, et la relation nulle partout ailleurs. Voir § 2 Prop 3·12.

·6 $1u = \imath \breve{\varrho} (0_u)$ Df

·7 $P \varepsilon 1\to1 . \supset . P^{1u} = P$

$[P^{1u} = 1'\pi P = P]$

1·8 $P \varepsilon 1\to1 . a \varepsilon u . \supset . P^a \varepsilon 1\to1$

$[P^{0u} \varepsilon 1\to1$ |1|

$P \varepsilon 1\to1$. §1Prop 5·7 $.\supset: a \varepsilon u . P^a \varepsilon 1\to1 . \supset . P^{\mathrm{seq}\, a} \varepsilon 1\to1$ |2|

|1|.|2| . Induct .ɔ. Prop]

·81 $x \varepsilon u . 0_u R^x z . \supset . x 1' z$

$[x 1' 0_u . 0_u R^x z . \supset . z 1' 0_u$ |1|

$0_u R^x x . \supset . 0_u R^{\mathrm{seq}x} \mathrm{seq}x$ |2| |1| . |2| . Induct .ɔ. Prop]

·82 $v \varepsilon \omega . R' \varepsilon \mathrm{Rel}v . x \varepsilon u . 0_v R'^x z . \supset . z \varepsilon v$

$[x 1' 0_u . 0_v R'^x z . \supset . z 1' 0_v . \supset . z \varepsilon v$ |1|

$0_v R'^x z . z \varepsilon v . \supset . 0_v R'^{\mathrm{seq}x} \mathrm{seq}z . \mathrm{seq}\, z \varepsilon v$ |2|

|1| . |2| . Induct .ɔ. Prop]

1·9 $v \varepsilon \omega . R' \varepsilon \mathrm{Rel}v . \supset . \exists\, 1\to1 \frown P \ni \{u = \breve{\pi} . v = \breve{\pi} : x,y \varepsilon u .$

$x R y . \supset_{x,y} . \imath \breve{\pi} x\, R'\, \imath \breve{\pi} y\}$

Cette proposition affirme que deux progressions sont toujours deux séries semblables, c'est à dire qu'on peut trouver une relation univoque et réciproque dont le domaine est l'une des deux progressions, et dont la relation converse a l'autre progression pour son domaine, et qui est telle qu'aux termes qui précèdent dans une série correspondent des termes qui précèdent dans l'autre, et vice versa.

[§ 1 Prop 1·8 .ɔ. $\exists\, \mathrm{rel} \frown P_0 \ni (\pi_0 = \iota 0_u . \breve{\pi}_0 = \iota 0 v)$ |1|

Prop 81 $.\supset: x \varepsilon u . 0_u R^x z . \supset . z \varepsilon u$ |2|

Prop 82 $.\supset: x \varepsilon u . 0_v R'^x z' . \supset . z' \varepsilon v$ |3|

|1| . |2| . |3| $.\supset: x \varepsilon u . z \breve{R}^x P_0 R'^x z' . \supset . z \varepsilon u . z' \varepsilon v . z 1' x$ |4|

§1 Prop 5·7 . §3 Prop 1·8 .ɔ. $\breve{R}^x P_0 R'^x \varepsilon 1\to1$ |5|

|4|.|5| . $Q = \mathrm{rel} \frown F \ni \{\exists u \frown x \ni (F = \breve{R}^x P_0 R'^x)\} . P = \cup' Q . \supset .\cdot.$

$P \varepsilon 1\to1 . u = \breve{\pi} . v = \breve{\pi} : x,y \varepsilon u . x R y . \supset_{x,y} . \imath \breve{\pi} x R' \imath \breve{\pi} y .\cdot. \supset$. Prop]

1·91 $u'\, \mathrm{sim}\, u . \supset . u' \varepsilon \omega$

Dans cette proposition on démontre que toute classe se mblable à une progression est elle-même une progression. Si P est la relation univoque et réciproque entre u et u', R la relation génératrice de u, alors $\breve{P}\, R\, P$ est la relation génératrice de u'.

[u′simu .ɔ. Ǝ 1+1 ∩ P′ɜ(uɔπ′ . π̆′u = u′) |1|

Pɛ 1+1 . uɔπ . π̆u = u′ : xɛu .$ɔ_x$. x′ = ιπ̆x . seqx′ = ιπ̆(seqx) :ɔ.

x′P̆x . xR seqx . seqx P seq x′ .ɔ. x′ P̆RP seq x′ |2|

Hp |2| . P̆RP = R′ .ɔ. R′ɛ 1+1 . ϱ̆′u ɔu′ |3|

Hp |3| . x_0′ = ιπ̆0_u .ɔ. x_0′ = ιu′−ϱ̆′u′ |4|

Hp |3| . sɛ Cls . ιu′−ϱ̆′u′ ɛs . ϱ̆′(u′s) ɔs .ɔ.·.
0_u (Pɛ)s : x(Pɛ)u′s .$ɔ_x$. seqx (Pɛ) u′s |5|

|5| . Induct .ɔ: xɛu .$ɔ_x$. x(Pɛ)u′s |6|

Hp |5| . |6| . Pɛ 1+1 .ɔ: x′ɛu′ .ɔ x′. x′ɛs |7|

|8| . |4| . |7| .ɔ. Prop]

✱ 2. Rɜ1+1 . ϱ̆ ɔ ϱ . Ǝ ϱ−ϱ̆ . uɛ ω_ϱ . ɔ : :

·1 ϱ̆u ɛ ω_ϱ

[Prop1·91 . R′ = R̆RR .ɔ. ϱ̆u ɛ $\omega_{\varrho'}$ |1|
|1| . R′ɔR .ɔ. Prop]

·11 xɛu .ɔ. $\breve\varrho^x u$ ɛ ω_ϱ

[u = ϱ^0_u u . Prop 2·1 . Induct .ɔ. Prop]

Note. $\breve\varrho^x u$ = yɜ| Ǝu ∩ zɜ (zRˣ y)|.

·12 xɛu . ɔ . x0′ seq x

[Ǝu−ϱ̆u . u −ϱ̆u ɛ Elm .ɔ. 0_u 0′1_u |1|

Prop 11 . xɛu .ɔ. $\breve\varrho^x$ uɛω_ϱ . x1′0 $\breve\varrho^x$ u |2|

|1| . |2| .ɔ: xɛu .$ɔ_x$. x0′ seqx]

La P 2·11 prouve qu'on peut omettre autant de termes qu'on veut au commencement d'une progression sans qu'elle cesse d'être une progression : la P 2·12 prouve que tout terme d'une progression diffère de son successeur.

·13 v ɔ u . Ǝv . ɔ . Ǝ v−ϱ̆v

[vɔ ϱ̆v .ɔ.·. 0_u −ɛv : xɛ u−v .$ɔ_x$. seqx −ɛv |1|

|1| . Induct .ɔ. −Ǝu∩v .ɔ. v = Λ |2|

|2| .ɔ: vɔu . Ǝv .ɔ. Ǝv−ϱ̆v :ɔ. Prop]

2·14 v ɔ u . Ǝv. ϱ̆vɔv .ɔ. vɛ ω_ϱ

[Prop 2·13 .ɔ. Ǝv−ϱ̆v |1|

Hp .ɔ. ϱ̆vɔv |2|

vɔu . uɔϱ .ɔ. vɔϱ |3|

xɛv . ϱ̆vɔv .ɔ. seqx ɛv :ɔ: xɛv .$ɔ_x$. $\breve\varrho^x$u ɔv :ɔ: xɛ v−ϱ̆v .ɔ. v = $\breve\varrho^x$ u |4|

|4| . Prop 2·11 .ɔ. Prop]

·15 $x \varepsilon \breve{\varrho} u . \supset . x 0' 0_u$

[$x \varepsilon \breve{\varrho} u . 0_u - \varepsilon \breve{\varrho} u . \supset .$ Prop]

·16 $x,z \varepsilon u . y \varepsilon \breve{\varrho} u . x R^y z . \supset . x 0' z$

[$u' = \breve{\varrho}^x u . \supset . u, \varepsilon \varrho \omega . x = 0_u . z \varepsilon u'$ |1| |1| . Prop 2·15 .ɔ. Prop]

Cette proposition prouve que le même terme ne peut jamais revenir dans une progression : tout terme diffère de tous les termes précédents.

·2 $a,b \varepsilon u . \supset . \exists u \frown c \ni (a R^b c)$

[$b 1' 0_u . \supset . a R^b a$ |1|

$a R^b c . c \varepsilon u . \supset . a R^{\mathrm{seq} b} \mathrm{seq} c . \mathrm{seq} c \, \varepsilon u$ |2|

|1| . |2| . Induct .ɔ. Prop]

·21 $a,b \varepsilon u . \supset . u \frown c \ni (a R^b c) \, \varepsilon$ Elm

[Prop 1·8 .ɔ. Prop]

·3 $a,b \varepsilon u . \supset . a + b = \imath u \frown c \ni (a R^b c)$ Df

·4 $a,b,x \varepsilon u . \supset . \exists u \frown y \ni \{x (R^a)^b y\}$

[$b 1' 0_u . \supset . x (R^a)^b x$ |1|

$x (R^a)^b y . \exists u \frown z \ni (y R^a z) . \supset . \exists u \frown z \ni \{x (R^a)^b R^a z\}$

$\supset . \exists u \frown z \ni \{x (R^a)^{\mathrm{seq} b} z\}$ |2|

|1| . |2| . Induct .ɔ. Prop]

·41 $a,b \varepsilon u . \supset . (R^a)^b \varepsilon 1 \rightarrow 1$

[$(R^a)^{0_x} \varepsilon 1 \rightarrow 1$ |1|

$(R^a)^b \varepsilon 1 \rightarrow 1$. §1Prop 5·7 .ɔ. $(R^a)^{\mathrm{seq} b} \varepsilon 1 \rightarrow 1$ |2|

|1| . |2| . Induct .ɔ. Prop]

·42 $a,b,x \varepsilon u . \supset . u \frown y \ni \{x (R^a)^b y\} \, \varepsilon$ Elm

[Prop 2·41 .ɔ. Prop]

·43 $a,b,x \varepsilon u . \supset . x + ab = \imath u \frown y \ni \{x (R^a)^b y\}$ Df

·44 $ab = 0_u + ab$ Df

·45 $ab \, 1' c . \supset . x + ab \, 1' \, x + c$ [Induct]

·46 $ab \, 0' c . \supset . x + ab \, 0' \, x + c$ [Induct]

·47 $ab \, 1' c . = . x + ab \, 1' \, x + c$

[Prop 2·45·46 .ɔ. Prop]

·48 $a \varepsilon u . \supset . a + 0_u = a$

[$a + 0_u = \imath u \frown x \ni (a R^{0_u} x) = a$]

·49 $a \varepsilon u . \supset . 0_u + a = a$

[Prop 1·81 .ɔ. Prop]

2·5 $a,b\varepsilon u$.ɔ. $R^a R^b = R^{a+b}$

[$R^a R^{0_u} = R^a = R^{a+0_u}$ |1|

$R^a R^b = R^{a+b}$.ɔ. $R^a R^{seqb} = R^a R^b R = R^{a+b} R = R^{seq(a+b)}$ |2|

$a + seqb = \imath u \cap x \ni (a R^{seqb} x) = \imath u \cap x \ni | \exists y \ni (a R^b y . y R x)|$

$= \imath u \cap x \ni | \exists u \cap (a,y) \ni (0_u R^a a . a R^b y . y R x)|$ |3|

|3| . Hp|2| .ɔ. $a + seqb = \imath u \cap x \ni | \exists u \cap y \ni (0_u R^{a+b} y . y R x)$

$= seq(a+b)$ |4|

|2| . |4| .ɔ. $R^a R^b = R^{a+b}$.ɔ. $R^a R^{seqb} = R^{a+seqb}$ |5|

|1| . |5| . Induct .ɔ. Prop]

·51 $a,b,x \varepsilon u$.ɔ. $(x+a)+b = x+(a+b)$

[$(x+a)+b = \imath u \cap z \ni | \exists u \cap y \ni (x R^a y . y R^b z)|$

$= \imath u \cap z \ni (x R^a R^b z)$ |1|

|1| . Prop 2·5 .ɔ. $(x+a)+b = \imath u \cap z \ni (x R^{a+b} z) = x+(a+b)$]

·52 $a,b,x \varepsilon u$.ɔ. $x+a+b = (x+a)+b$ Df

·53 $a,b \varepsilon u$.ɔ. $a+b = b+a$

[$0_u + 0_u = 0_u + 0_u$ |1| $0_u + 1_u = 1_u = 1_u + 0_u$ |2|

$a+1_u = 1_u + a$. ɔ : $seqa+1_u = (a+1_u)+1_u = (1_u+a)+1_u$ |3|

Hp |3| . |3| . Prop 2·52 .ɔ. $seqa+1_u = 1_u + (a+1_u) + 1_u = 1_u + seqa$ |4|

|2| . |4| . Induct .ɔ. $a+1_u = 1_u + a$ |5|

|3| . $a+b = b+a$.ɔ. $a + seqb = a+b+1_u = a+1_u+b = 1_u+a+b = 1_u+b+a$

$= b+1_u+a = seqb+a$ |6|

|1| . |6| . Induct .ɔ. Prop]

·6 $a \varepsilon u$.ɔ. $a1_u = a$

[$a1_u = \imath u \cap x \ni | 0_u (R^a)^{1_u} x| = \imath u \cap x \ni |0_u R^a x| = 0_u + a = a$]

·60 $a\,0_u = 0_u a = a$

·61 $a,b \varepsilon u$.ɔ. $a(b+1_u) = ab+a$

[$a(0_u + 1_u) = a1_u = a = a0_u + a$ |1|

$a(b+1_u) = ab+a$.ɔ.

$a(seqb+1_u) = \imath u \cap x \ni |0_u (R^a)^{seqb+1_u} x$

$= \imath u \cap x \ni | \exists u \cap y \ni (0_u R^{ab+a} y . y R^a x)|$

$= \imath u \cap x \ni |0_u R^{ab+a+a} x|$

$= \imath u \cap x \ni |0_u R^{aseqb+a} x| = aseqb+a$ |2|

|1| . |2| . Induct .ɔ. Prop]

·611 $a,b \varepsilon u$.ɔ. $(b+1_u)a = ba+a$

[$(b+1_u)0_u = 0_u = b0_u + 0_u$ |1|

$(b+1_u)a = ba+a$.ɔ.

$(b+1_u)(a+1_u) = \imath u \cap x \ni |0_u R^{(b+1_u)(a+1_u)} x|$

$= \imath u \cap x \ni | \exists y \ni (0_u R^{(b+1_u)a} y . y R^{b+1_u} x)|$

$= \imath u \cap x \ni | \exists y \ni (0_u R^{ba+a} y . y R^{b+1_u} x)|$

$= ba+a+b+1_u = ba+b+a+1_u$ |2|

Prop 2·61 . ɔ . $ba+b+a+1_u = b(a+1_u)+a+1_u$ |3|

|2| . |3| .ɔ: $(b+1_u)a = ba+a$.ɔ. $(b+1_u)(a+1_u) = b(a+1_u) + a + 1_u$ |4|

|1| . |4| . Induct .ɔ. Prop]

2·62 $a,b,c \varepsilon u \;.\supset.\; a(b+c) = ab+ac$

$a(b+0_u) = ab = ab+a0_u$ |1|

$a(b+c) = ab+ac \;.\supset.\; a(b+c+1_u) = a(b+c)+a = ab+ac+a$ |2|

Prop 2·61 $.\supset.\; ab+ac+a = ab+a(c+1_u)$ |3|

Prop 2·53 $.\supset.\; ab+ac+a = ac+ab+a = ac+a(b+1_u) = a(b+1_u)+ac$ |4|

|2| . |3| . |4| $.\supset:\; a(b+c) = ab+ac \;.\supset.\; a(b+c+1_u) = ab+a(c+1_u) = a(b+1_u)$
$+ac$ |5|

|1| . |5| . Induct . ɔ . Prop]

·63 $a,b,c \varepsilon u \;.\supset.\; (b+c)a = ba+ac$

[$(b+c)0_u = 0_u = b0_u + c0_u$ |1|

$(b+c)a = ba+ca \;.\supset.\; (b+c)(a+1_u) = (b+c)a+b+c = ba+ca+b+c$
$= ba+b+ca+c$ |2|

Prop 2·61 $.\supset:\; ba+b = b(a+1_u) \,.\, ca+c = c(a+1_u)$ |3|

|2| . |3| $.\supset:\; (b+c)\,a = ba+ca \;.\supset.\; (b+c)(a+1_u) = b(a+1_u)+c(a+1_u)$ |4|

|1| . |4| . Induct .ɔ. Prop]

·64 $a,b \varepsilon u \;.\supset.\; ab = ba$

[$a0_u = 0_u = 0_u\, a$ |1|

$ab = ba \;.\supset.\; a(b+1_u) = ab+a = ba+a = (b+1_u)a$ |2|

|1| . |2| . Induct .ɔ. Prop]

On a maintenant prouvé les lois formales de l'addition et de la multiplication : la loi associative de l'addition dans P 2·51, la loi commutative de l'addition dans P 2·53, la loi distributive dans ·62 et ·63, et la loi commutative de la multiplication dans ·64. La loi associative de la multiplication résulte immédiatement (comme pour tous les produits relatifs) de la même loi pour le produit logique. Dans ce qui précède on n'a jamais présupposé les nombres : la théorie toute entière s'applique a toute progression. De là découle dans une forme générale toute l'arithmétique des nombres finis.

✱ 3. $R \varepsilon 1{\to}1 \,.\, \breve{\varrho} \supset \varrho \,.\, \exists \varrho - \breve{\varrho} \,.\, u \varepsilon \omega_\varrho \,.\, a,b,c \varepsilon u \;.\supset::$

·1 $P \varepsilon 1{\to}1 \,.\, yPz \,.\, xP^{\text{seq}\,a}z \;.\supset.\; xP^a y$

[$x\,P^{\text{seq}\,a}\,z \;.\supset.\; \exists\, u \frown \hat{w}(xP^a w \,.\, wPz)$ |1|

$P \varepsilon 1{\to}1 \;.\supset.\; \hat{w}(wPz)\, \varepsilon\, \text{Elm}$ |2|

|2| $.\; yPz \;.\supset.\; y \varepsilon \hat{w}(wPz) \;.\supset.$ Prop]

·11 $P \varepsilon 1{\to}1 \,.\, xPy \,.\, xP^{\text{seq}\,a}z \;.\supset.\; y\,P^a z$

$P^{\text{seq}\,a} = P^{a+1_u} = P^{1_u+a} = PP^a$ |1|

|1| $.\supset:\; xP^{\text{seq}\,a}z \;.=.\; \exists \hat{w}(xPw \,.\, wP^a z)$ |2|

|2| $.\; \breve{\pi}x \,\varepsilon\, \text{Elm} \,.\, xPy \;.\supset.\; y \varepsilon \hat{w}(xPw \,.\, wP^a z \;.\supset.$ Prop]

·12 $x \varepsilon \breve{\varrho}u \;.\supset.\; x - 1_u = \iota\, u \frown \hat{y}\,(\text{seq}\,y = x)$ Df

3·2 $\exists\, u \frown x\ni(aR^x b \,.\cup.\, bR^x a)$

[$O_u\, R^b\, b$ |1|

$\exists\, \breve{\varrho} u \frown x\ni(aR^x b)$. Prop 3·11 .ɔ. $x-1_u\, \varepsilon\, u \frown y\ni(\text{seq}a\, R^y\, b)$ |2|

$aR^{O_u}b$.ɔ. $bR^{1_u}\text{seq}a$.ɔ. $\exists\, u \frown y\ni(bR^y\, \text{seq}a)$ |3|

$\exists\, u \frown x\ni(bR^x\, a)$. $z\varepsilon u \frown x\ni(bR^x\, a)$.ɔ. $bR^{\text{seq}z}\text{seq}a$

ɔ. $\exists\, u \frown y\ni(bR^y\, \text{seq}a)$ |4|

|2|.|3|.|4| .ɔ. $\exists\, u \frown x\ni(aR^x\, b \,.\cup.\, bR^x\, a)$.ɔ. $\exists\, u \frown y\ni(\text{seq}a\, R^y\, b \,.\cup.\, b\, R^y\, \text{seq}a$ |5|

|1|.|5| Induct .ɔ. Prop]

·21 $O_u\, \varepsilon\, u \frown x\ni(aR^x b \,.\cup.\, bR^x a)$.ɔ. $a1'b$

·22 $O_u - \varepsilon\, u \frown x\ni(aR^x b \,.\cup.\, bR^x a)$.ɔ. $\exists\, \breve{\varrho} u \frown x\ni(aR^x b \,.\cup.\, bR^x a)$

·3 $a > b$.=. $\exists\, \breve{\varrho} u \frown x\ni(bR^x a)$ Df

·31 $a < b$.=. $\exists\, \breve{\varrho} u \frown x\ni(aR^x b)$ Df

·32 $a1'b \,.\cup.\, a > b \,.\cup.\, a < b$ [Prop 3·2 .ɔ. Prop]

·33 $a > b$.ɔ. $-(a < b)$

[$.a > b\, .\, a < b$.=. $\exists \breve{\varrho} u \frown (x,y)\ni(aR^x\, b\, .\, bR^y\, a$.ɔ. $\exists \breve{\varrho} u \frown x+y\ni(aR^{x+y}a)$

ɔ. $-$(Prop 2·16) |1|

|1| .ɔ.·. Prop 2·16 .ɔ. $a > b$.ɔ. $-(a < b)$.·.ɔ. Prop]

·34 $a < b$.ɔ. $-(a > b)$

·35 $a < b = b > a$ [Prop 3·3·31 .ɔ. Prop]

·36 $a < b$.ɔ. $ac < bc$

·37 $a > b$.ɔ. $ac > bc$

✱ 4. $R\varepsilon\, 1\text{+}1$. $\varrho\, \mathsf{ɔ}\, \breve{\varrho}$. $\exists \varrho - \breve{\varrho}$. $u\varepsilon\omega_\varrho$. $a,b,c\varepsilon\breve{\varrho} u$.ɔ::

·1 aBc .=. $ab=c$ Df

·11 $B\varepsilon$ Rel

[$x\varepsilon u$.ɔ. $c\ni(xb=c)\varepsilon$ Elm |1|

|1| . § 1 Prop 1·8 .ɔ: $xb=c$.$\mathsf{ɔ}_a$. $\exists \text{Rel}\frown R_{xb}\ni(\varrho_{xb}=\iota x\, .\, \breve{\varrho}_{xb}=\iota c)$ |2|

$K_b = \text{Rel}\frown R\ni\{\exists u\frown x\ni(xb=c\, .\, \varrho=\iota x\, .\, \breve{\varrho}=\iota c)\}$. $R_b = \cup'\, K_b$.ɔ.

$aR_b\, c$.=.$ab=c$.ɔ. $R_b\, 1'B$ |3|

|3| . § 1 Prop 1·95 .ɔ. Prop]

·2 $B\varepsilon\, 1\text{+}1$

[$b1'1_u$.ɔ. $B\varepsilon 1\text{+}1$ |1|

$B\varepsilon 1\text{+}1$.·$d1'\text{seq}b$.ɔ. $D\varepsilon 1\text{+}1$ |2|

|1| . |2| . Induct .ɔ. Prop]

·3 $d\varepsilon\breve{\varrho}\, u$.ɔ: $aB\breve{C}d$.=. $\exists\, u \frown n\ni\{ab=n\, .\, dc=n\}$.=. $bA\breve{D}c$

·4 $B\breve{C}\varepsilon\, 1\text{+}1$

[$B,C\varepsilon 1\text{+}1$.ɔ. Prop]

$4 \cdot 5$ $\mathrm{H} \varepsilon \mathrm{Nc}+1 \,.\supset: x\mathrm{Op}_{\mathrm{H}} = y \,.=.\, x\mathrm{H}y$ Df

$\cdot 51$ $\mathrm{Op} = p \ni \{(p=) \varepsilon \mathrm{Nc}+1\}$ Df

En mathématique on a l'habitude de parler des opérations plutôt que des relations univoques. Les Df 4·5·51 n'ont pour but que de permettre l'emploi du langage habituel. La relation entre une relation univoque et une opération s'exprime dans ces Df: l'opération suivie du signe d'égalité signifie la relation correspondante.

$\cdot 6$ $\mathrm{r}_u = q \ni \{\exists\, \breve{\varrho} u \frown (x,y) \ni (q = \mathrm{Op}_{\mathrm{X}\breve{\mathrm{Y}}})\}$ Df

$\cdot 61$ $b/c = \mathrm{Op}_{\mathrm{B}\breve{\mathrm{C}}}$ Df

Les P 4·6·61 donnent la Df générale des opérations qui corrrespondent aux nombres rationnels. Il est important de remarquer que selon cette Df aucun nombre rationnel ne doit être identifié avec un nombre entier, puisque les nombres rationnels sont des opérations sur les nombres entiers, tandis que les nombres entiers ne le sont pas.

$\cdot 7$ $ab/(ac) = a/c$ [Prop 4·3 .ɔ. Prop]

$\cdot 71$ $a\mathrm{B}\breve{\mathrm{A}}b$ [$a\mathrm{B}ab \,.\, b\mathrm{A}ab$.ɔ. Prop]

$\cdot 72$ $q,q' \varepsilon \mathrm{r} \,.\supset.\, \exists\, u \frown (x,y,z) \ni (q = x/z \,.\, q' = y/z)$

[$q = m/n \,.\, q' = m'/n'$. Prop 4·7 .ɔ. $q = mn'/(nn') \,.\, q' = m'n/(nn')$.ɔ. Prop]

$\cdot 73$ $q = x/z = x'/z' \,.\, q' = y/z = y'/z' \,.\, x < y \,.\supset.\, x' < y'$

[Prop 3·36 .ɔ. Prop]

$\cdot 74$ » » $x > y \,.\supset.\, x' > y'$

[Prop 3·37 .ɔ. Prop]

$\cdot 8$ $q,q' \varepsilon \mathrm{r}u \,.\supset\therefore\, q\mathrm{M}q' \,.=:\, q = x/z \,.\, q' = y/z \,.\supset_{x,y,z}.\, x < y$ Df

$\cdot 81$ $\mathrm{M} \varepsilon \mathrm{Rel}$

[Cette P se prouve par la méthode de Prop 4·11, mais la preuve est longue]

$\cdot 9$ $q,q' \varepsilon \mathrm{r}u \,.\, q\mathrm{M}q' \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{r}u \frown q'' \ni (q\mathrm{M}q'' \,.\, q''\mathrm{M}q')$

[$q = a/c \,.\, q' = b/c \,.\, -(a\mathrm{R}b) \,.\supset.\, q \;\mathrm{M}\; \mathrm{seq}a/c \,.\, \mathrm{seq}a/c \;\mathrm{M}\; b/c$ |1|

$q = a/c \,.\, q' = b/c \,.\, a\mathrm{R}b \,.\, d \varepsilon \breve{\varrho}^2 x \,.\supset.\, q = ad/(cd) \,.\, q' = bd/(cd) \,.\, -(ad\mathrm{R}bd)$ |2|

|1|.|2| .ɔ. Prop]

$\cdot 91$ $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$ [Prop 4·9 . § 1 Prop 2·3 .ɔ. Prop]

Pour éviter les confusions, j'ai désigné par M la relation d'être moindre parmis les rationels. On vient de démontrer que cette relation est égale à son carré, ce qui prouve qu'elle engendre une série condensée. Dans le § 5 nous développerons la théorie générale de ces séries.

✱ 5. $\mathrm{R} \varepsilon 1+1 \,.\, \varrho \supset \varrho \,.\, \exists\, \breve{\varrho} - \breve{\varrho} \,.\, u \varepsilon \omega_\varrho \,.\, a,b,c,d \varepsilon u \,.\supset::$

$\cdot 1$ $+a = \mathrm{Op}_{\mathrm{R}^a}$ Df $\cdot 11$ $-a = \mathrm{Op}_{\breve{\mathrm{R}}^a}$ Df

$\cdot 2$ $\breve{\mathrm{R}}^a = (\breve{\mathrm{R}^a})$ [Induct]

·3 $+u = x\ni\{\exists\, u \frown y\ni(x\ 1'\ +y)\}$ Df

·31 $-u = x\ni\{\exists\, u \frown y\ni(x\ 1'\ -y)\}$ Df

·32 $\pm u = +u \cup -u$ Df

·4 $q,q' \varepsilon \mathrm{r}_u$.ɔ∴ $q(\mathrm{D/C})q'$.=: $q = a/c\ .\ q' = b/c$.

·a $\breve{\varrho}^2 u \frown (x,y,z)\ni(a = xz\ .\ c = yz$:∪: $b = xz\ .\ c = yz)$.ɔ. $a + d = b$ Df

·41 $+d/c = \mathrm{Op}_{\mathrm{D/C}}$ Df ·42 $-d/c = \mathrm{Op}\,_{(\breve{\mathrm{D/C}})}$ Df

·5 $+\mathrm{r}_u = x\ni\{\exists\, u \frown (y,z)\ni(x = +y/z)$ Df

.51 $-\mathrm{r}_u = x\ni\{\exists\, u \frown (y,z)\ni(x = -y/z)\}$ Df

I $+\mathrm{r}_u$ est la classe des rationnels positifs, qui sont des opérations sur es rationnels sans signes. Les classes u, r_u, $+u$, $+\mathrm{r}_u$ s'excluent mutuellement: aucun terme de l'une des quatre n'appartient à aucune des trois autres.

§ 4.

Le fini et l'infini.

* 1·1 Cls infin = Cls $\frown u\ni\{\exists\, u \frown x\ni(u - \iota x$ sim $u)\}$ Df

·11 Cls fin = Cls − Cls infin Df

·2 Cls infin = Cls $\frown u\ni\{x \varepsilon u$.ɔ$_x$. $u - \iota x$ sim $u\}$

[§2 Prop 3·5 .ɔ: $x,y \varepsilon u$.ɔ. $u - \iota x$ sim $u - \iota y$:ɔ. Prop]

·21 Cls infin = Cls $\frown u\ni\{u - \iota x$ sim $u\}$

[Prop 1·2 . $x \varepsilon u$.ɔ. $u - \iota x$ sim u |1|

$x - \varepsilon u$.ɔ. $u - \iota x = u$.ɔ. $u - \iota x$ sim u |2|

|1| . |2| .ɔ. Prop]

·22 Cls fin = Cls $\frown u\ni\{x \varepsilon u$.ɔ$_x$. $-(u - \iota x$ sim $u)\}$

[Prop 1·1·11 .ɔ. Prop]

·3 $u \varepsilon$ Cls infin . $x - \varepsilon u$.ɔ. $u \cup \iota x$ ε Cls infin

[Hp . $y \varepsilon u$.ɔ. $u - \iota y$ sim u |1|

|1| . §2 Prop 3·3 .ɔ. u sim $u \cup \iota x$.ɔ. Prop]

·31 $u \cup \iota x$ ε Cls fin . $x - \varepsilon u$.ɔ. $u \varepsilon$ Cls fin

[Prop 1·3 . Transp .ɔ. Prop]

·4 $u \varepsilon$ Cls . $u \cup \iota x$ ε Cls infin . $x - \varepsilon u$.ɔ. $u \varepsilon$ Cls infin

[$u \cup \iota x$ ε Cls infin . $x - \varepsilon u$.ɔ. $u \cup \iota x$ sim u |1|

|1| . $y \varepsilon u$. §1 Prop 3·51 .ɔ. u sim $u - \iota y$.ɔ. Prop]

·41 $u \varepsilon$ Cls fin . $x - \varepsilon u$.ɔ: $u \cup \iota x$ ε Cls fin

[Prop 1·4 . Transp .ɔ. Prop]

·5 $u \varepsilon$ Cls . $x - \varepsilon u$.ɔ: $u \varepsilon$ Cls fin .=. $u \cup \iota x$ ε Cls fin

[Prop 1·31·41 .ɔ. Prop]

·6 $\Lambda \varepsilon$ Cls fin

[$u \varepsilon$ Cls infin .ɔ. $\exists\, u$:ɔ. Prop]

1·61 Elm ɔ Cls fin
[$u\varepsilon$ Elm .ɔ$_u$. ∃x∍(u= ιx) : Prop 1·41 . Λε Cls fin :ɔ. Prop]

·7 $u\varepsilon$ Cls fin .ɔ. ∃-u Pp

✱ 2. Sεg .ɔ::

·1 $\breve{\sigma}$ infin = $\breve{\sigma}$(Cls infin) Df

·11 $\breve{\sigma}$ fin = $\breve{\sigma}$(Cls fin) Df

·12 $\breve{\sigma}$ fin = $\breve{\sigma}$ - $\breve{\sigma}$ infin [Sε Nc-+1 .ɔ. Prop]

·2 $x\varepsilon\,\breve{\sigma}$fin .=. $x+1_\sigma\,\varepsilon\,\breve{\sigma}$ fin [Prop 1·5 .ɔ. Prop]

·21 $x\varepsilon\,\breve{\sigma}$fin .=. x0'x + 1_σ
[Prop 1·22 . §2 Prop 4·6 .ɔ. Prop]

·3 R_σ = ιRel ∩ R∍{xRy .=. $x\varepsilon\,\breve{\sigma}$ fin . y=$x+1_\sigma$} Df

·31 $R_\sigma\,\varepsilon$ 1→1 [§2 Prop 3·52 . Sε Nc→1 .ɔ. Prop]

·32 R_σ ɔ 0' [Prop 2·21 .ɔ. Prop]

·33 ϱ_σ = $\breve{\sigma}$ fin
[$x\varepsilon\,\varrho_\sigma$. uSx .ɔ. $u\varepsilon$ Cls fin {1}
{1} . Prop 1·7 .ɔ. ∃-u .ɔ. ∃$\breve{\varrho}_\sigma x$.ɔ. Prop]

·34 $\breve{\varrho}_\sigma$ = $\breve{\sigma}$ fin - ι0_σ

[$x\varepsilon\,\breve{\sigma}$ fin . uSx . x0'0_σ .ɔ. ∃u .ɔ: $y\varepsilon u$.ɔ. u-ιy Sι$\varrho_\sigma x$:ɔ. Prop]

·35 $\breve{\sigma}$ fin ε Cls infin

[$\breve{\sigma}$ fin = ϱ_σ . $\breve{\sigma}$ fin - ι0_σ = $\breve{\varrho}_\sigma$. ϱ_σ sim $\breve{\varrho}_\sigma$.ɔ. Prop]

✱ 3. Sεg .ɔ::

·1 $s\varepsilon$ Cls . $0_\sigma\,\varepsilon s$. ϱ_σ (s ∩ $\breve{\sigma}$ fin) ɔs .ɔ. $\breve{\sigma}$ fin ɔ s Pp

·11 Induct = Prop 3·1 Df

On peut, si on veut, définir les nombres finis par l'induction complète, et prendre comme Pp la définition 1·1. Mais je n'ai pas réussi à déduire une de ces P de l'autre. Si l'on définit une classe infinie par la propriété de renfermer une partie qui lui est semblable, on ne réussit pas à démontrer que la partie qu'on obtient en enlevant un seul individu est semblable à la classe entière, ce qui a des conséquences fatales pour la théorie des nombres finis. Si l'on définit une classe infinie par la propriété de rester semblable à elle-même quand on lui ajoute un terme qui ne lui appartient pas, on exclues la classe de tous les individus, puisqu'on ne pent rien ajouter à cette classe. Pour ces raisons j'ai adopté la définition 1·1, avec les deux Pp 1·7 et 3·1.

3·2 σ̆ fin ε ω

[Prop 2·3·31·33·34·3·1 . §3 Prop 1·1 .ɔ. Prop]

·3 ϱ̆ fin = Cls ∩ uƷ {ƎS ∩ SƷ(u = σ̆ fin)} Df

·31 ϱ̆ fin = ω

[Prop 3·2 .ɔ. ϱ̆ fin ɔ ω |1|

Re 1+1 . u = ϱ . σ̆ fin = ϱ̆ . P = BRσR̆ .ɔ. u ε ω_π |2|

§2 Prop 1·54 .ɔ. u ε ϱ̆ fin |3| |1| . |2| . |3| .ɔ. Prop]

On a maintenant prouvé que toute classe semblable aux nombres cardinaux finis est une progression, et vice versa. De là on déduit que tous les résultats du § 3 s'appliquent aux nombres finis.

·4 u ε Cls fin .ɔ. Ǝ ω ∩ vƷ(u ɔ v)

[u = Λ .ɔ: v ε ω .ɔ$_u$. u ɔ v |1|

§2 Prop 3·5 . §3 Prop 1·91 .ɔ: u ε Elm . v′ ε ω . x ε v .ɔ. v′ − ιx ∪ u ε ω
.ɔ. Ǝ ω ∩ vƷ(u ɔ v) |2|

u ε Cls fin . v ε ω . u ɔ v . uSx . y − ε u .ɔ.
u ∪ ιy ε Cls fin . u ∪ ιy S x+1σ . u ∪ ιy ɔ v ∪ ιy |3|

Prop 3·31 . Prop 2·35 . Prop 1·1·3 . §3 Prop 1·91 .ɔ. v ∪ ιy ε ω |4|

|3| . |4| .ɔ: u ε Cls fin . v ε ω . u ɔ v . uSx . y − ε u .ɔ.
u ∪ ιy ε Cls fin . v ∪ ιy ε ω . u ∪ ιy ɔ v ∪ ιy . u ∪ ιy S x+1σ |5|

|1| : |2| . |5| . Induct :ɔ. Prop]

·41 u ε Cls fin .ɔ. Ǝ ω ∩ vƷ{u ɔ v . Ǝ v ∩ xƷ(y ε u .=. y < x)}

Pour la définition de $y<x$, voir § 3 Prop 3·31.

[u = Λ . v ε ω .ɔ: y ε u .=. y < 0_v |1|

u ε Elm . Prop 3·4 .ɔ. Ǝ ω ∩ vƷ(ιu ε v) |2|

v ε ω . ιu ε v . §3 Prop 2·11 .ɔ. ιu ∪ v ∩ zƷ (z > ιu) ε ω
.ɔ. Ǝ ω ∩ v′Ʒ {u ɔ v′ . Ǝ v′ ∩ xƷ(y ε u .=. y < x)} |3|

v ε ω . u ε Cls fin . u ɔ v . Ǝ v ∩ xƷ(y ε u .=. y < x) . z − ε u .ɔ::
v ∪ ιz ε ω . u ∪ ιz ε Cls fin . u ∪ ιz ɔ v ∪ ιz .·. x ε v : y < x .=. y ε u .·.ɔ.
Ǝ ω ∩ v′Ʒ {v ɔ v′ . v′ − v = ιz . x ε v′ : y ε u ∪ ιz .=. y < x} |4|

|1| . |2| . |4| . Induct .ɔ. Prop]

·42 Cls fin = Cls ∩ uƷ{Ǝ ω ∩ vƷ [u ɔ v . Ǝ v ∩ xƷ (y ε u .=. y < x)]}

On déduit que toute classe finie peut être bien ordonnée.

·5 u ε Cls fin .ɔ. −Ǝ Cls ∩ vƷ (v ɔ u . Ǝ u − v . u sim v)

[S ε g . vSx . u − vSy .ɔ. uS x+y |1|

§3 Prop 2·16 .ɔ. x+y 0′ x .ɔ. Prop]

·51 Cls infin = Cls ∩ uƷ {Ǝ Cls ∩ vƷ (v ɔ u . Ǝ u − v . u sim v)}

[Prop 1·1: 3·51 . Transp :ɔ. Prop]

La P 3·51 donne la définition habituelle de l'infini, de laquelle, cependant, il ne paraît pas possible de déduire la P 1·1.

Stampato coi tipi della « Rivista di Matematica » dalla Tip. Gerbone - Torino.

$3{\cdot}6$ $u, v \varepsilon$ Cls fin .ɔ. $u \cup v$ ε Cls fin

[$v ɔ u$.ɔ. $u \cup v = u$.ɔ. Prop |1|
$u ɔ v$.ɔ. $u \cup v = v$.ɔ. Prop |2|
$\exists u - v$. $\exists v - u$. S$\exists$g . uSx . $v - u$Sy .ɔ. $u \cup v$ S$x+y$ |3|
|3| . §3 Prop 2.2 .ɔ. Prop |4|
|1| . |2| . |4| .ɔ. Prop]

$\cdot 61$ $u \varepsilon$ Cls infin . $v \varepsilon$Cls .ɔ. $u \cup v \varepsilon$ Cls infin

[$x \varepsilon u$. $u \varepsilon$ Cls infin .ɔ. $u$sim $u - \iota x$.ɔ. $u \cup v$sim$u \cup v - \iota x$.ɔ. Prop]

$\cdot 62$ $u \cup v \varepsilon$Cls fin .ɔ. $u, v \varepsilon$Cls fin

[Prop 3.61 . transp .ɔ. Prop]

§ 5

Les séries condensées

$1{\cdot}1$ Rε Rel . R ɔ 0' . R^2 = R .ɔ. Φ_R = Cls ∩ $u\ni$|u ɔ $\rho \cup \breve{\rho}$.:.
$x, y \varepsilon u$.ɔ$_{x,y}$: $x 1' y$.∪. xRy .∪. yRx .:.
$x, y \varepsilon u$. xRy .ɔ$_{x,y}$. $\exists u$ ∩ $z\ni$(xRz . zRy)| Df

$\cdot 11$ Φ = Cls ∩ $u\ni$| $\exists$rel ∩ R$\ni$(R ɔ 0' . R^2 = R . $u \varepsilon \Phi_R$)| Df

Ces P donnent la définition d'une série condensée. Si R est une relation contenue dans la diversité et égale à son carré, et si u est une classe contenue dans la somme logique du domaine de R avec celui de $\breve{R}$, et si deux u différents ont toujours une des deux relations R,$\breve{R}$, et si entre deux u différents il y a toujours un troisième u, alors u est une Φ_R. La classe Φ est la classe de toutes les séries condensées pour toutes les relations qui engendrent de telles séries.

$\cdot 2$ Rε Rel . Rɔ0' . R^2 = R : $x \varepsilon \rho \cup \breve{\rho}$. ɔ$_x$.$\rho x \cup \iota x \cup \breve{\rho} x = \rho \cup \breve{\rho}$: .ɔ.
$\rho, \breve{\rho}, \rho \cup \breve{\rho} \varepsilon$ Φ_R

$\cdot 3$ Rε Rel . R ɔ 0' . R^2 = R . $u \varepsilon \Phi_R$. $\exists$ $u - \breve{\rho} u$.ɔ. $u - \breve{\rho} u \varepsilon$ Elm

[$x \varepsilon u - \breve{\rho} u$. $y \varepsilon u - \iota x$: xRy .∪. yRx :ɔ. xRy .ɔ. $y \varepsilon \breve{\rho} u$]

$\cdot 4$ Rε Rel . Rɔ0' . R^2 = R .ɔ. $\Phi_R = \Phi_{\breve{R}}$

$\cdot 5$ RεRel . Rɔ0' . R^2=R . Sε1→1 . $\sigma \varepsilon$ Φ_R .ɔ. $\breve{\sigma} \varepsilon$ $\Phi \breve{S}$RS

[$x \varepsilon \sigma$. $y 1' \iota \sigma x$.ɔ. $y \breve{S} x$ (1)
$x' \varepsilon \breve{\rho} x$. $y' 1' \iota \breve{\sigma} x'$.ɔ. x'Sy' . xRx' .ɔ. xRSy' (2)
(1) . (2) .ɔ. $y\breve{S}$ RSy' . $y' \varepsilon \breve{\sigma}$ (3)
y $\breve{S}$RS y' . y' $\breve{S}$RS y'' .ɔ. y $\breve{S}$RS$\breve{S}$RS y'' (4)
Sε 1→1 . R^2=R .ɔ. $\breve{S}$RS$\breve{S}$RS ɔ $\breve{S}$RS (5)

3·2 $\breve{\sigma}$ fin $\varepsilon\, \omega$

[Prop 2·3·31·33·34·3·1 . §3 Prop 1·1 .ɔ. Prop]

·3 $\breve{\rho}$ fin $=$ Cls ∩ $u\ni$ {∃S ∩ S∋($u = \breve{\sigma}$fin)} Df

·31 $\breve{\rho}$ fin $= \omega$

[Prop 3·2 .ɔ. $\breve{\rho}$ fin ɔ ω |1|

Rε 1+1 . $u = \varrho$. $\breve{\sigma}$ fin $= \breve{\varrho}$. P= RRσR̆ .ɔ. $u\varepsilon\, \omega_\pi$ |2|

§2 Prop 1·54 .ɔ. $u\varepsilon\, \breve{\rho}$ fin |3| |1| . |2| . |3| .ɔ. Prop]

On a maintenant prouvé que toute classe semblable aux nombres cardinaux finis est une progression, et vice versa. De là on déduit que tous les résultats du § 3 s'appliquent aux nombres finis.

·4 $u\varepsilon$ Cls fin .ɔ. ∃ ω∩ v∋(u ɔ v)

[u=Λ .ɔ: $v\varepsilon\omega$.ɔ$_u$. uɔv |1|

§2 Prop 3·5 . §3 Prop 1·91 .ɔ: $u\varepsilon$Elm . $v'\varepsilon\omega$. $x\varepsilon v$.ɔ. v'−ιx ∪ u εω

.ɔ. ∃ ω∩ v∋(uɔv) |2|

$u\varepsilon$ Cls fin . $v\varepsilon\omega$. uɔv . uSx . y−εu .ɔ.

u∪ιy ε Cls fin . u∪ιy S x+1σ . u∪ιy ɔ v∪ιy |3|

Prop 3·31 . Prop 2·35 . Prop 1·1·3 . §3 Prop 1·91 .ɔ. v∪ιy εω |4|

|3|.|4| .ɔ: $u\varepsilon$ Cls fin . $v\varepsilon\omega$. uɔv . uSx . y−εu .ɔ.

u∪ιy ε Cls fin . v∪ιyεω . u∪ιy ɔ v∪ιy . u∪ιy S x+1σ |5|

|1| : |2| . |5| . Induct :ɔ. Prop]

·41 $u\varepsilon$ Cls fin .ɔ. ∃ ω∩ v∋{uɔv . ∃ v∩x∋($y\varepsilon u$.=. y<x)}

Pour la définition de y<x, voir § 3 Prop 3·31.

[u=Λ . $v\varepsilon\omega$.ɔ: $y\varepsilon u$.=. y<0$_v$ |1|

$u\varepsilon$Elm . Prop3·4 .ɔ. ∃ ω∩ v∋(ι$u\varepsilon v$) |2|

$v\varepsilon\omega$. ι$u\varepsilon v$. §3 Prop 2·11 .ɔ. ιu ∪ v∩z∋ (z>ιu) εω

.ɔ. ∃ω∩v'∋ {uɔv' . ∃v' ∩ x∋($y\varepsilon u$.=. y<x)} |3|

$v\varepsilon\omega$. $u\varepsilon$ Cls fin . uɔv . ∃v∩x∋($y\varepsilon u$.=. y<x) . z−εu .ɔ::

v ∪ ιzεω . u ∪ ιz ε Cls fin . u ∪ ιz ɔ v∪ιz .·. $x\varepsilon v$: y<x .=. $y\varepsilon u$.·.ɔ.

∃ω∩v'∋ {vɔv' . v'−v = ιz . $x\varepsilon v'$: $y\varepsilon$ u∪ιz .=. y<x } |4|

|1| . |2| . |4| . Induct .ɔ. Prop]

·42 Cls fin = Cls ∩ u∋{∃ω ∩ v∋ [uɔv . ∃v ∩ x∋ ($y\varepsilon u$.=. y<x)]}

On déduit que toute classe finie peut être bien ordonnée.

·5 $u\varepsilon$ Cls fin .ɔ. −∃ Cls ∩ v∋ (vɔu . ∃u−v . $u$sim$v$)

[Sεg . vSx . u−vSy .ɔ. uS x+y |1|

§3 Prop 2·16 .ɔ. x+y 0' x .ɔ. Prop]

·51 Cls infin = Cls ∩ u∋ {∃ Cls ∩ v∋ (vɔu . ∃u−v . $u$sim$v$)}

[Prop 1·1: 3·51 . Transp :ɔ. Prop]

La P 3·51 donne la définition habituelle de l'infini, de laquelle, cependant, il ne paraît pas possible de déduire la P 1·1.

Stampato coi tipi della « Rivista di Matematica » dalla Tip. Gerbone - Torino.

3·6 $u,v \varepsilon$ Cls fin .Ɔ. $u \cup v$ ε Cls fin

[$v \supset u$.Ɔ. $u \cup v = u$.Ɔ. Prop |1|

$u \subset v$.Ɔ. $u \cup v = v$.Ɔ. Prop |2|

$\exists u - v$. $\exists v - u$. Sεg . uSx . $v - u$Sy .Ɔ. $u \cup v$ S$x+y$ |3|

|3| . §3 Prop 2.2 .Ɔ. Prop |4|

|1| . |2| . |4| .Ɔ. Prop]

·61 $u\varepsilon$ Cls infin . $v\varepsilon$Cls .Ɔ. $u \cup v\varepsilon$ Cls infin

[$x \varepsilon u$. $u\varepsilon$ Cls infin .Ɔ. $u$sim $u - \iota x$.Ɔ. $u \cup v$sim$u \cup v - \iota x$.Ɔ. Prop]

·62 $u \cup v\varepsilon$Cls fin .Ɔ. $u, v\varepsilon$Cls fin

[Prop 3.61 . transp .Ɔ. Prop]

§ 5

Les séries condensées

1·1 Rε Rel . R Ɔ 0' . R^2 = R .Ɔ. Φ_R = Cls ⌒ $u\ni${u Ɔ $\varrho \cup \breve{\varrho}$.·.
$x,y\varepsilon u$.Ɔ$_{x,y}$: x1'y .∪. xRy .∪. yRx .·.
$x,y\varepsilon u$. xRy .Ɔ$_{x,y}$. $\exists u$ ⌒ $z\ni$(xRz . zRy)} Df

·11 Φ = Cls ⌒ $u\ni${ $\exists$rel ⌒ R$\ni$(R Ɔ 0' . R^2 = R . $u\varepsilon$ Φ_R)} Df

Ces P donnent la définition d'une série condensée. Si R est une relation contenue dans la diversité et égale à son carré, et si *u* est une classe contenue dans la somme logique du domaine de R avec celui de $\breve{R}$, et si deux *u* différents ont toujours une des deux relations R,$\breve{R}$, et si entre deux *u* différents il y a toujours un troisième *u*, alors *u* est une Φ_R. La classe Φ est la classe de toutes les séries condensées pour toutes les relations qui engendrent de telles séries.

·2 Rε Rel . RƆ0' . R^2 = R : $x\varepsilon$ $\varrho \cup \breve{\varrho}$. Ɔ$_x$.$\varrho x \cup \iota x \cup \breve{\varrho} x$ = $\varrho \cup \breve{\varrho}$: .Ɔ.
ϱ, $\breve{\varrho}$, $\varrho \cup \breve{\varrho}\varepsilon$ Φ_R

·3 Rε Rel . R Ɔ 0' . R^2 = R . $u\varepsilon\Phi_R$. $\exists$ u - $\breve{\varrho}u$.Ɔ. u - $\breve{\varrho}u\,\varepsilon$ Elm

[$x\varepsilon u - \breve{\varrho}u$. $y\varepsilon u - \iota x$: xRy .∪. yRx :Ɔ. xRy .Ɔ. $y\varepsilon\breve{\varrho}u$]

·4 Rε Rel . RƆ0' . R^2 = R .Ɔ. Φ_R = $\Phi_{\breve{R}}$

·5 RεRel . RƆ0' . R^2=R . Sε1+1 . $\sigma\varepsilon$ Φ_R .Ɔ. $\breve{\sigma}\varepsilon$ $\Phi\breve{S}$RS

[$x\varepsilon\sigma$. y1'$\iota\breve{\sigma}x$.Ɔ. $y\breve{S}x$ (1)

$x'\varepsilon\,\breve{\varrho}x$. y'1'$\iota\breve{\sigma}\,x'$.Ɔ. x'Sy' . xRx' .Ɔ. xRSy' (2)

(1) . (2) .Ɔ. $y\breve{S}$ RSy' . $y'\varepsilon\,\breve{\sigma}$ (3)

y $\breve{S}$RS y' . y' $\breve{S}$RS y'' .Ɔ. y $\breve{S}$RS$\breve{S}$RS y'' (4)

Sε 1+1 . R^2=R .Ɔ. $\breve{S}$RS$\breve{S}$RS Ɔ $\breve{S}$RS (5)

$(4) . (5) .\supset. (\breve{S}RS)^2 \supset \breve{S}RS$ (6)

$y \breve{S}RS y'' .\supset. \exists\, \sigma \cap (x',x'') \ni (y\breve{S}x . xRx'' . x''Sy'')$ (7)

$(7) . R^2 = R . S \varepsilon 1 \to 1 .\supset. \exists\, \sigma \cap (x,x',x'') \ni (y\breve{S}x . xRx' . x'S\breve{S}x . x'Rx'' . x''Sy'')$ (8)

$(8) .\supset. \breve{S}RS \supset (\breve{S}RS)^2$ (9)

$(6) . (9) .\supset. (\breve{S}RS)^2 = \breve{S}RS$ (10)

$R \supset 0' . S \varepsilon 1 \to 1 .\supset. \breve{S}RS \supset 0'$ (11)

$(3) . (10) . (11) .\supset.$ Prop]

Cette P donne une méthode par laquelle on obtient une nouvelle série condensée par corrélation avec une série condensée donnée. Elle prouve que toute classe semblable à une série condensée est elle-même une série condensée par rapport à une certaine relation. On a le théorème plus général: soit P une relation telle que $P \supset 0' \cdot P^2 \supset P$: la classe des séries du même type d'ordre que π est la classe des domaines des relations P' telles qu'il y a une relation S univoque et réciproque telle que $P' = \breve{S}PS \; \pi = \sigma$. Ce théorème s'applique aux séries de toute espèce sans aucune exception. J'omets la preuve pour éviter les longueurs.

·6 $R \varepsilon \mathrm{Rel} . R \supset 0' . R^2 = R . u \varepsilon \Phi_R . P = R_{u \cap \rho u} .\supset. u \varepsilon \Phi_P . u = \pi \cup \breve{\pi}$

Pour la Df de $R_{u \cap \rho u}$, voir § 2 Prop 3·12.

* 2. $P \varepsilon \mathrm{Rel} . P \supset 0' . P^2 = P . u = \pi \cup \breve{\pi} . u \varepsilon \Phi_P .\supset::$

·1 $v \varepsilon \mathrm{Cls} . v \supset u .\supset. \pi(\pi v) = \pi v$

[$\pi v = \Lambda .\supset. \pi(\pi v) = \Lambda .\supset. \pi(\pi v) = \pi v$ (1)

$\exists \pi v .\supset\therefore x \varepsilon \pi v .\supset. \exists\, v \cap y \ni (xPy) :$ (2)

$(2) . P^2 = P .\supset. \exists\, u \cap z \ni (xPz . zPy) .\supset. x \varepsilon \pi(\pi v) :$ (3)

$x \varepsilon \pi(\pi v) .\supset. \exists\, u \cap z \ni \{ \exists\, v \cap y \ni (xPz . zPy) \}$

$\supset. \exists\, v \cap y \ni (xPy) .\supset. x \varepsilon \pi v$ (4)

$(1) . (3) . (4) .\supset.$ Prop]

·2 $v \varepsilon \mathrm{Cls} . v \supset u .\supset. \breve{\pi}(\breve{\pi} v) = \breve{\pi} v$

·3 $pu = \mathrm{Cls} \cap v \ni \{ v \supset u . \pi v = v . \exists v . \exists u - v \}$ Df

·4 $\breve{p}u = \mathrm{Cls} \cap v \ni \{ v \supset u . \breve{\pi} v = v . \exists v . \exists u - v \}$ Df

pu correspond à ce que M. Peano appelle la classe des segments [RdM. t.6 p.133, § 8, P·0]. J'appellerai pu la classe des segments inférieurs, $\breve{p}u$ celle des segments supérieurs.

·5 $v \varepsilon \mathrm{Cls} . v \supset u . \exists\, v \cap \breve{\pi} . \exists\, u - \pi v .\supset. \pi v \varepsilon pu$

[$\exists\, v \cap \breve{\pi} .\supset. \exists \pi v$ (1) Prop 2·1 $.\supset. \pi(\pi v) = \pi v$ (2)

$(1) . (2) . \exists\, u - \pi v .\supset.$ Prop]

2·51 $v \varepsilon \mathrm{Cls} . v \supset u . \exists v \frown \overset{\smile}{\pi} . \exists u - \overset{\smile}{\pi} v .\supset. \overset{\smile}{\pi} v \; \varepsilon \; \overset{\smile}{pu}$

·6 $v, v' \varepsilon \, pu .\supset: v \supset v' . \cup . v' \supset v$

[$v, v' \varepsilon pu . \exists v' - v .\supset. \exists v' \frown v\overset{\smile}{\pi} .\supset: x \varepsilon v .\supset_x . \exists v' \frown y \ni (x \mathrm{P} y) :$ (1)
(1) . $v' \varepsilon pu .\supset: x \varepsilon v .\supset_x . x \varepsilon v' :\supset. v \supset v'$ (2)
$\exists v - v' .\supset. v' \supset v$ (3) (2) . (3) .$\supset$. Prop]

Pour la définition de $v\overset{\smile}{\pi}$, voir §1 Prop 1·34.

·61 $v, v' \varepsilon \, pu .\mathrm{c}: v \supset v' . \cup . v' \supset v$

·7 $u \mathrm{T} v' .=. v, v' \varepsilon pu . v \supset v' . v -= v'$ Df

·71 $\mathrm{T} \varepsilon \mathrm{Rel}$

[§1 Prop 3·82 .$\supset$: $v, v' \varepsilon pu .=. v \varepsilon_{pu} \overset{\smile}{\varepsilon}_{pu} v'$ (1) ($\supset$) εRel (2)
($=$) εRel (3)

(1) . (2) . (3) . §1 Prop 1·98 . Prop 2·5 .$\supset$. $(\varepsilon_{pu} \overset{\smile}{\varepsilon}_{pu}) \frown (\supset) \frown (-=)$ εRel (4)

(4) .$\mathrm{T} = (\varepsilon_{pu} \overset{\smile}{\varepsilon}_{pu}) \frown (\supset) \frown (-=)$.$\supset$. Prop]

Les P (2) et (3) de cette preuve sont des Pp, que nous aurions dû introduire au § 1, si nous avions voulu faire une logique complète: (2) affirme que l'inclusion d'une classe dans une classe est une relation, et (3) affirme que l'égalité des classes est une relation.

·72 $\mathrm{T} \supset 0' \; . \; \mathrm{T}^2 \supset \mathrm{T}$

·73 $\mathrm{T}^2 = \mathrm{T}$

[$v \mathrm{T} v' .\supset. \exists v' - v .\supset. \exists \pi v' - v .\supset. \exists v' \frown (x,y) \ni (x, y - \varepsilon v . x 0' y)$ (1)
(1) . $x \mathrm{P} y .\supset. v \mathrm{T} \pi x . \pi x \mathrm{T} v'$ (2) (1) . $y \mathrm{P} x .\supset. v \mathrm{T} \pi y . \pi y \mathrm{T} v'$ (3)
(1) . (2) . (3) .$\supset$. Prop]

·8 $pu \; \varepsilon \; \Phi_{\mathrm{T}}$ [Prop 1·1.2·71·72·73 .$\supset$. Prop]

On vient de prouver que la classe des segments inférieurs est une série condensée par rapport à T. On prouve de même que la classe des segments supérieurs est une série condensée.

* 3. $\mathrm{P} \varepsilon \mathrm{Rel} . \mathrm{P} \supset 0' . \mathrm{P}^2 = \mathrm{P} . u = \pi \cup \overset{\smile}{\pi} : x \varepsilon u .\supset. \pi x \cup \iota x \cup \overset{\smile}{\pi} x = u \;:\supset::$

·1 $v \varepsilon \, pu .\supset. \tau v = pu \frown x \ni (x \mathrm{T} v)$ [$\tau v \supset \tau . \tau \supset pu$.$\supset$. Prop]

·2 $w \; \varepsilon \; \mathrm{Cls} . w \supset pu .\supset. \tau w = pu \frown x \ni \{ \exists \, w \frown y \ni (x \mathrm{T} y) \}$

·21 $w\tau = pu \frown x \ni \{ y \varepsilon w .\supset_x . x \mathrm{T} y \}$

Pour la définition de $w\tau$, voir § 1 Prop 1·36.

·3 $w \; \varepsilon \mathrm{Cls} . w \supset pu .\supset. \cup' w \supset u$

$w \varepsilon \; \mathrm{Cls} . w \supset pu . \exists w . \exists \, pu - w . \exists u - \cup' w .\supset.$.

·4 $\cup' w \; \varepsilon \; pu$

[$x \varepsilon \cup' w .=. \exists \, w \frown v \ni (x \varepsilon v . v \varepsilon pu) .=. \exists w \frown v \ni \{ \exists v \frown y \ni (x \mathrm{P} y) \}$
$.=. \exists \cup' w \frown y \ni (x \mathrm{P} y) .=. x \varepsilon \pi (\cup' w) :=. \cup' w = \pi (\cup' w)$]

$3{\cdot}5 \quad \tau w = \tau(\cup' w)$

[$v \varepsilon \tau w .=. v \varepsilon pu . \exists\, w \cap z \ni (v \varepsilon \tau z)$ (1) $\quad z \varepsilon w .\supset. \tau z \supset \tau(\cup' w)$ (2)

$(1) . (2) .\supset. v \varepsilon \tau w .\supset. v \varepsilon pu . v \varepsilon \tau(\cup' w) :\supset. \tau w \supset \tau(\cup' w)$ (3)

$v \varepsilon \tau(\cup' w) .\supset. v \supset \cup' w . v \neq \cup' w .\supset. \exists\, \cup' w - v$

$.\supset. \exists\, w \cap z \ni (v \mathrm{T} z) .\supset. v \varepsilon \tau w :\supset. \tau(\cup' w) \supset \tau w$ (4)

$(3) . (4) .\supset.$ Prop]

Cette P prouve que, si w est une classe de segments d'une série condensée, la classe des segments contenus dans un terme variable de w est la même que la classe des segments contenus dans la somme logique de la classe des classes w. Quand la classe w n'a pas de maximum, on déduit que la somme logique des w est la limite supérieure des w: la classe w a donc toujours ou bien un maximum ou bien une limite supérieure. (Voir les P 3·6·7·8 qui suivent). La moitié du théorème analogue se démontre pour la limite inférieure et le produit logique dans Prop 3·51.

$\cdot 51 \quad \tau(\cap' w) \supset w\tau$

[$x \varepsilon w .\supset: \cap' w \supset x$ (1)

$(1) . z \mathrm{T} \cap' w .\supset: x \varepsilon w .\supset_x . z \mathrm{T} x :\supset. z \varepsilon w\tau .\supset.$ Prop]

On ne peut pas prouver que $\tau(\cap' w) = w\tau$. Ce théorème ne sera vrai que quand w a un minimum; dans le cas contraire, la limite inférieure des w sera $\cap' w$, et appartiendra dans certains cas à la classe $w\tau$, mais non pas à la ctasse $\tau(\cap' w)$.

$\cdot 6 \quad \exists\, pu \cap x \ni (\tau w = \tau x)$ $\qquad$ [Prop 3·5 $.\supset.$ Prop]

$\cdot 7 \quad \lambda' w = \iota\, pu \cap x \ni (\tau w = \tau x)$ $\qquad$ Df

$\cdot 8 \quad v \varepsilon pu .\supset. \exists\, \mathrm{Cls} \cap w \ni (w \supset pu . v = \lambda' w)$ $\qquad$ [$w = \tau v$]

Les P 3·6·8 prouvent que pu est parfaite pour les limites supérieures, mais non pas nécessairement pour les limites inférieures. $\lambda' w$, telle qu'on vient de la définir, n'est pas toujours une limite, puisqu'elle est le maximum s'il y en a un. Les segments qui composent la classe pu se définissent par des classes quelconques comprises dans u. Dans le § prochain nous examinerons les segments et les limites qui s'obtiennent en employant exclusivement ce que M. G. Cantor appelle des séries fondamentales [RdM. V, p. 157].

§ 6.

Les séries fondamentales dans une série condensée.

Les séries fondamentales sont des séries du type ω, dont chacune monte ou descend continuellement dans la série condensée qui la contient. Dans le premier cas (1·1) j'appelle *pro gression* la série fondamentale; dans le second cas (1·2) je l'appelle *régression*. Quant à la série condensée, elle n'est sujette à aucune condition excepté qu'elle soit condensée: je ne décide pas, par exemple, si elle est dénombrable ou continue ou ni l'un ni l'autre.

✱ 1. $P \varepsilon \mathrm{Rel} . P \supset 0' . P^2 = P : x \varepsilon \breve{\pi} \cup \pi .\supset. \pi x \cup \iota x \cup \breve{\pi} x =$

$\breve{\pi} \cup \pi : u = \breve{\pi} \cup \pi :\supset::$

·1 $\omega_P = \omega \frown v \ni \{ v \supset u : R \varepsilon \mathrm{Rel}_v . x,y \varepsilon v . xRy .\supset_{x,y}. xPy \}$ Df

·2 $\omega_{\breve{P}} = \omega \frown v \ni \{ v \supset u : R \varepsilon \mathrm{Rel}_u . x,y \varepsilon v . xRy .\supset_{x,y}. yPx \}$ Df

Si v est une progression, Rel_v est la classe des relations génératrices de cette progression (§ 3 Prop 1·12). Dans le cas actuel, on ne doit apmettre comme relation génératrice qu'une relation qui satisfait à la condition donnée. Une telle relation, si elle existe, est unique. Il ne faut pas confondre ωP et ω_π. Voir § 3 Prop 1·11.

·3 $\pi\omega = x \ni \{ \exists\, \omega_P \frown v \ni (x = \pi v) \}$ Df

·31 $\omega\breve{\pi} = x \ni \{ \exists\, \omega_P \frown v \ni (x = v\breve{\pi}) \}$ Df

·4 $\breve{\pi}\omega = x \ni \{ \exists\, \omega_{\breve{P}} \frown v \ni (x = \breve{\pi} v) \}$ Df

·41 $\omega\pi = x \ni \{ \exists\, \omega_{\breve{P}} \frown v \ni (x = v\pi) \}$ Df

Il ne faut pas confondre $\pi\omega$ avec pu [§ 5 Prop 2·3] : pu est la classe de tous les segments inférieurs de u, $\pi\omega$ est la classe des segments inférieurs qui définissent des progressions. Ces deux classes sont identiques dans bien des cas, mais je ne connais aucune preuve qu'elles le soient toujours.

·5 $v \varepsilon \omega_P .\supset. v \supset \pi v$ [$x \varepsilon v .\supset. x P \mathrm{seq} x .\supset. x \varepsilon \pi v$]

·51 $v \varepsilon \omega_{\breve{P}} .\supset. v \supset \breve{\pi} v$

·6 $v \varepsilon \omega_P .\supset. v\breve{\pi} = u - \pi v$

[$x \varepsilon v\breve{\pi} .\supset. x \varepsilon u - \pi v$ (1)

$x \varepsilon u - \pi v .\supset. -\exists v \frown y \ni (xPy) .\supset.\cdot. y \varepsilon v .\supset_y : y 1' x .\cup. yPx$ (2)

$y 1' x .\supset. x P \mathrm{seq} y .\supset. x \varepsilon \pi v$ (3)

(2) . (3) $.\supset.\cdot. x \varepsilon u - \pi v .\supset: y \varepsilon v .\supset_y. yPx :\supset. x \varepsilon v\breve{\pi}$ (4)

(1) . (4) $.\supset.$ Prop]

·61 $v \varepsilon \omega_{\breve{P}} .\supset. v\pi = u - \breve{\pi} v$

·7 $\pi\omega \supset pu$ ·71 $\breve{\pi}\omega \supset \breve{p}u$

·8 $v,v' \varepsilon \omega_P .\supset: \pi v \supset \pi v' .\cup. \pi v' \supset \pi v$ [§5 Prop 2·6 $.\supset.$ Prop]

·81 $v,v' \varepsilon \omega_{\breve{P}} .\supset: \breve{\pi} v \supset \breve{\pi} v' .\cup. \breve{\pi} v' \supset \breve{\pi} v$ [§5 Prop 2·61 $.\supset.$ Prop]

✱ 2. $P \varepsilon \mathrm{Rel} . P \supset 0' . P^2 = P : x \varepsilon \pi \cup \breve{\pi} .\supset_x. \pi x \cup \iota x \cup \breve{\pi} x =$

$\pi \cup \breve{\pi} : u = \pi \cup \breve{\pi} . v,v' \varepsilon \omega_P :\supset::$

·1 $x \varepsilon v .\supset_x. \exists v' \frown y \ni (xPy . y P\mathrm{seq} x) :\supset. -\exists\, v' \frown v\breve{\pi}$

[Hp : $k \varepsilon \omega .\supset_k. \exists k :\supset. \exists v' \frown y \ni \{ \exists v \frown x \ni (xPy . y P \mathrm{seq} x) \}$

$R \varepsilon \mathrm{Rel}_v . R' \varepsilon \mathrm{Rel}_{v'}$. §3 Prop 2·11 . $x \varepsilon v . y \varepsilon v' . xPy . y P\mathrm{seq} x .\supset. \overset{x}{\breve{\varrho}}\, v, \overset{y}{\breve{\varrho}}{}'\, v' \varepsilon \omega_P$ (1)

$\mathrm{Hp}\,(1) \,.\, y' \varepsilon v' \,.\, x' \varepsilon \breve{\varrho}^{x}\, v \,.\, x'\mathrm{P}y' \,.\, y'\,\mathrm{P\,seq}x' \,.\supset.\, y' \varepsilon\, \breve{\varrho}'^{y}\, v'$ (2)

$\exists\, \breve{\varrho}'^{y}\, v' \cap y'' \ni (\mathrm{seq}x'\ \mathrm{P}\, y'' \,.\, y''\, \mathrm{P\,seq\,seq}x') \,.\supset:\, \mathrm{seq}y'\ 1'\ y'' \,.\cup.\, \mathrm{seq}y'\ \mathrm{P}y'' :$
$\supset.\, \mathrm{seq}y'\ \mathrm{P\,seq\,seq}x'$ (3)

$(2)\,.\,(3) \,.\supset.\!\cdot.\, z \varepsilon v' \,.\supset_z :\, z \varepsilon\, \pi v \,.\supset.\, \mathrm{seq}z\ \varepsilon\, \pi v$ (4) $\mathrm{Hp} \,.\supset.\, 0_{v'} \varepsilon\, \pi v$ (5)

$(4)\,.\,(5)\,.\,\mathrm{Induct} \,.\supset.\, v' \supset \pi v \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

Puisque cette démonstration est un peu compliquée, je la répéterai en mots. La P affirme que si deux progressions v,v' sont tels qu'entre deux termes consécutifs quelconques de v il se trouve toujours au moins un terme de v', alors il n'y a aucun terme de v' qui succède à tout terme de v. Soit x un terme de v, et y un terme de v' entre x et seq x. Alors les termes de v qui ne précèdent pas x forment une progression $\breve{\varrho}^{x}\, v$, et les termes de v' qui ne précèdent pas y forment une progression $\breve{\varrho}^{y}\, v'$. Si alors x' est un terme quelconque de $\breve{\varrho}^{x}\, v$, y' un terme de v' entre x' et seq x', on deduit que y' est un terme de $\breve{\varrho}^{y}\, v$. Or il y a un terme y'' de $\breve{\varrho}^{y}\, v'$ qui vient entre seq x' et seq seq x', et un tel terme doit ou bien être seq y' ou bien succéder à seq y'; donc seq y doit précéder seq seq x'. Il s'ensuit que, si z est un v' qui précède quelque v, alors seq z est aussi un v' qui précède quelque v. Mais par hypothèse il y a des v' qui précèdent des v; donc le premier terme de v' doit précéder des v. On déduit par induction que tout terme de v' précède des termes de v, c'est-à-dire qu'aucun terme de v' ne succède à tout terme de v.

2·2 $\mathrm{Hp\ Prop}\ 2{\cdot}1 \,.\supset.\, \pi v = \pi v'$

[$x \varepsilon\, \pi v' \,.\supset.\, \exists v' \cap y \ni (x\mathrm{P}y)$ (1)

$(1)\,.\, v' \supset \pi v \,.\supset:\, x \varepsilon\, \pi v' \,.\supset_x.\, x \varepsilon\, \pi v :\supset.\, \pi v' \supset \pi v$ (2)

$x \varepsilon\, \pi v \,.\supset.\, \exists v \cap y \ni (x\mathrm{P}y) \,.\supset.\, \exists v' \cap z \ni (x\mathrm{P}z) \,.\supset.\, x \varepsilon\, \pi v' :\supset.\, \pi v \supset \pi v'$ (3)

$(2)\,.\,(3) \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

·3 $w \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, w \supset u \,.\, \exists v \cap z \ni (w \supset \breve{\pi} z) : x \varepsilon v \,.\supset_x.\, \exists w \cap y \ni (x\mathrm{P}y \,.\, y\mathrm{Pseq}x).$

$w \cap y \ni (x\mathrm{P}y \,.\, y\mathrm{Pseq}x)\ \varepsilon\ \mathrm{Elm} : v\breve{\pi} \supset w\breve{\pi} \,.\!\cdot\!.\supset.\, w\ \varepsilon\ w\mathrm{P}$

Cette P affirme que si v est une progression dans une série condensée u, et si w est une classe contenue dans u et succédant à un certain terme de v, et s'il y a un terme de w, et un seul, entre deux termes consécutifs quelconques de v, et si finalement les termes qui succèdent a tout terme de v succèdent aussi à tout terme de w, alors w est une progression dans u.

[$\mathrm{Hp}\,.\,\S 1\mathrm{Prop}1{\cdot}8 \,.\supset:\, x \varepsilon v \,.\supset_x.\, \exists 1\!+\!1 \cap \mathrm{R}_x \ni \{\iota x = \varrho_x \,.\, w \cap y \ni (x\mathrm{P}y \,.\, y\mathrm{Pseq}x) = \breve{\varrho} x \}$

$x \varepsilon v \,.\supset_x.\, \mathrm{R}_x = \imath 1\!+\!1 \cap \mathrm{R}_x \ni \{\iota x = \varrho_x \,.\, w \cap y \ni (x\mathrm{P}y \,.\, y\mathrm{Pseq}x) = \breve{\varrho} x \} :$
$\mathrm{R}_w \varepsilon \mathrm{Rel} \cap \mathrm{R}' \ni \{a\mathrm{R}'b \,.=.\, \exists v \cap x \ni (a\mathrm{R}_x b)\} \,.\, \S 3\mathrm{Prop}2{\cdot}16 :\supset.\, \mathrm{R}_w \varepsilon\ 1\!+\!1$ (1)
$\mathrm{R} \varepsilon \mathrm{Rel}_v : x \varepsilon v \,.\supset_x.\, w_x = \iota w \cap y \ni (x\mathrm{P}y \,.\, y\mathrm{Pseq}x) : \mathrm{seq}w_x = w_{\mathrm{seq}x} :\supset.\, x\mathrm{R}_w w_x \,.\supset.$

$w_x\, \breve{\mathrm{R}}_w\, \mathrm{Rseq}x \,.\, \mathrm{seq}x\, \mathrm{R}_w \mathrm{seq}w_x :\supset.\, w_x\, \breve{\mathrm{R}}_w\, \mathrm{R}\ \mathrm{R}_w\, \mathrm{seq}w_x$ (2)

w_x Pseq$x$. seq$x$ Pseqw_x .ɔ. w_x Pseqw_x (3)

$x \varepsilon v$-$\iota 0_v$.ɔ. $w_{0\,v}$ Px .ɔ. -(wɔ$\breve{\pi}x$) (4)

(4) . Hp .ɔ. wɔ$\breve{\pi}0_v$ (5)

$\breve{v\pi}$ɔ$\breve{w\pi}$.ɔ: $y \varepsilon w$.ɔ$_y$. Ǝ$v \frown x'$ɜ(yPseqx') (6)

Hp (6) . §3Prop. 2·11 .ɔ. $v \frown x'$ɜ(yPseqx') $\varepsilon \omega$P

$y \varepsilon w$. $v \frown x'$ɜ(yPseqx') $= v'$. $x = 0_{v'}$.ɔ. $y = w_x$ (7)

§1 Prop5·7 . (1) . R′ $= \breve{\mathrm{R}}_w$RR$_w$.ɔ. R′ε1→1 . $w_{0\,v} = \iota w$-$\varrho' w$ (8)

$s \varepsilon$Cls . $w_{0\,v}$ εs : $x \varepsilon v$. w_x εs .ɔ$_x$. seqw_x εs :ɔ: x(R$_w$ s)sw .ɔ$_x$. seq$x$(R$_w$ s)sw (9)

(9) . Hp(9) . Induct .ɔ: $x \varepsilon v$.ɔ$_x$, x(R$_w$ s) sw (10)

Hp (9) . (10) . R$_w$ ε1→ .ɔ: w_x εw .ɔ$_w$. w_x εs (11)

(7) . (8) . (11) .ɔ. Prop]

·4 ƎωP$\frown w$ɜ($v w = \Lambda$. $\pi v = \pi w$) [Prop2·3 .ɔ. Prop]

·5 Ǝ$\breve{v\pi} \frown z$ɜ($\pi z = \pi v$) .ɔ. $\breve{v\pi} \frown z$ɜ($\pi z = \pi v$) εElm

[$\pi z = \pi v$. zPz' .ɔ. $\pi z'$- $= \pi v$ (1)

$\pi z = \pi v$. z'Pz .ɔ. $\pi z'$- $= \pi v$ (2) (1) . (2) .ɔ. Prop]

·6 Ǝ$\breve{v\pi} \frown z$ɜ($\pi z = \pi v$) .ɔ. l′v $= \iota \breve{v\pi} \frown z$ɜ($\pi z = \pi v$) Df

·61 $w \varepsilon \breve{\omega \mathrm{P}}$. Ǝ$w\pi \frown z$ɜ($\breve{\pi z} = \breve{\pi w}$) .ɔ. l$_\iota w = \iota w\pi \frown z$ɜ($\breve{\pi z} = \breve{\pi w}$) Df

l′v et l$_\iota w$, telles qu'on vient de les définir, sont de vraies limites, tandis bue $\lambda' v$ et λ_ι v du § précédent étaient ou bien des limites ou bien des maxima ou des minima. Puisque l′v appartient à la classe $v\pi$, l′v ne peut pas appartenir à la classe v. qui du reste n'a pas de maximum, par définition. De même l$_\iota$ w n'appartient pas à la classe w, qui n'a pas de minimum. Si une ωP ou une $\breve{\omega \mathrm{P}}$ possède une limite, elle ne peut en avoir qu'une seule; mais elle peut n'en avoir point. Dans les classes dérivées, $\pi\omega$, $\omega\pi$, $\breve{\omega\pi}$, $\breve{\pi\omega}$ au contraire, on peut démontrer l'existence des limites, comme nous allons voir.

✱ 3 PεRel . Pɔ0′ . P^2=P . $u = \pi \breve{\pi}$: $x \varepsilon u$.ɔ$_x$. $\pi x \frown \iota x \breve{\pi} x = u$:ɔ: :

·1 $a, b \varepsilon u$. aPb .ɔ. ƎωP $\frown v$ɜ($\breve{\pi v}$ɔπa . πv ɔπb)

Cette P affirme qu'on peut trouver une progression dont tous les termes sont contenus entre deux termes donnés de la série condensée u.

[$x \varepsilon u$. xPb . P^2 = P .ɔ. Ǝ$u \frown y$ɜ(xPy . yPb) (1)

§ 1 Prop 1·8 Rε1→1 . $\breve{\varrho}$ ɔ ϱ . Ǝϱ-$\breve{\varrho}$. $v' \varepsilon w_\varrho$.ɔ. Ǝ 1→1$\frown$R$_{0\,v'}$ɜ($\varrho_{0\,v'} = \iota 0_{v'}$.

aP$\breve{\iota \varrho_0}_{v'}$. $\breve{\iota \varrho_0}_{v'}$ Pb) (2)

§1 Prop1·8 . (1) . Hp(2) . $x \varepsilon v'$.ɔ: Ǝ1→1$\frown$R$_x$ ɜ($\varrho_x = \iota x$. aP$\breve{\iota \varrho_x}$. $\breve{\iota \varrho_x}$Pb) .ɔ.

$\exists 1\text{→}1 \frown R_{seq x} \ni (\rho_{seq x} = \iota seq x . \breve{\iota\rho}_x P \breve{\iota\rho}_{seq x} . \breve{\iota\rho}_{seq x} P b)$ (3)

(2).(3). Induct .ɔ: $x \varepsilon v' . \supset_x . \exists 1\text{→}1 \frown R_x \ni (\rho_x = \iota x . a P \breve{\iota\rho}_x . \breve{\iota\rho}_x P \breve{\iota\rho}_{seq x} . \breve{\iota\rho}_{seq x} P b)$ (4)

$x \varepsilon v' . \supset_x . S_x \varepsilon 1\text{→}1 \frown R_x \ni (\rho_x = \iota x . a P \breve{\iota\rho}_x . \breve{\iota\rho}_x P \breve{\iota\rho}_{seq x} . \breve{\iota\rho}_{seq x} P b)$:
$S = Rel \frown R'' \ni \{\exists v' \frown x \ni (R'' = S_x)\} . R' = \cup ' S . \therefore \supset .$

$R' \varepsilon 1\text{→}1 . \rho' = v' . \breve{\rho}' \operatorname{sim} v' . \widetilde{\pi\rho'} \supset \breve{\pi} a . \pi\rho' \supset \pi b$ (5)

(5) . § 3 Prop 1·91 .ɔ. $\rho' \varepsilon \omega_P$ (6) (5) . (6) .ɔ. Prop]

Dans la preuve qu'on vient de donner, on prend d'abord une progression quelconque v' dont la relation génératrice est R. On prend un terme quelconque entre a et b, et on établit une relation $R_{0v'}$, qui subsiste uniquement entre le premier terme de v' et le terme qu'on a pris entre a et b. Alors on prouve par induction que pour tout terme x de v', on peut trouver une relation R_x qui subsiste seulement entre x et un seul terme entre a et b, qui précède le seul terme auquel seq x a la relation R seq x. Alors on prend la somme logique R' des relations R_x pour toutes les valeurs de x pour lesquelles x est un v, et on démontre que le domaine de $\breve{R}'$ est une progression dans u, dont tous les termes se trouvent entre a et b. Le processus qu'on a employé peut se décrire comme « compter sans nombres ».

3·11 $a,b \varepsilon u . a P b . \supset . \exists \omega_{\breve{P}} \frown v \ni (\breve{\pi} v \supset \breve{\pi} a . \pi v \supset \pi b)$
[§ 5 Prop 1·4 . § 6 Prop 3·1 .ɔ. Prop]

·2 $\pi\omega \, \varepsilon \, \Phi$

[$v,v' \varepsilon \omega_P . \pi v T \pi v' . a,b \varepsilon v' \text{-} \pi v . a P b$. Prop 3·1 .ɔ.
$\exists \omega_P \frown v'' \ni (\breve{\pi v''} \supset \breve{\pi} a . \pi v'' \supset \pi b) . \supset . \exists \omega_P \frown v'' \ni (\pi v T \pi v'' . \pi v'' T \pi v') . \supset .$ Prop]
Pour la Df de T, voir § 5 Prop 2·7

·21 $\breve{\pi\omega} \varepsilon \Phi$

·3 $\breve{\omega\pi} \, \varepsilon \, \Phi$

[Prop 1·6 .ɔ: $x,x' \varepsilon \breve{\omega\pi} . = . u\text{-}x, u\text{-}x' \varepsilon \pi\omega$ (1) (1). Prop 3·2 .ɔ. Prop]

·31 $\omega\pi \, \varepsilon \, \Phi$

·4 $\exists \pi\text{-}\breve{\pi} . \supset . \frown ' \pi\omega = \pi\text{-}\breve{\pi} . \frown ' \pi\omega \, \varepsilon$ Elm

[$x \varepsilon \pi\text{-}\breve{\pi} .\supset: v \varepsilon \omega_P . \supset_v . x \varepsilon \pi v :\supset. x \varepsilon \frown ' \pi\omega$ (1)

Prop 3·1·2 . $x \varepsilon \breve{\pi} . \supset . \exists \omega_P \frown v \ni (x \varepsilon \breve{v\pi}) . \supset . x\text{-}\varepsilon \frown ' \pi\omega$ (2)

(1) . (2) . § 5 Prop 1·3 .ɔ. Prop]

·41 $\exists \breve{\pi}\text{-}\pi . \supset . \frown ' \breve{\pi\omega} = \breve{\pi}\text{-}\pi . \frown ' \breve{\pi\omega} \varepsilon$ Elm

·5 $\exists \pi\text{-}\breve{\pi} . \supset . \frown ' \breve{\omega\pi} = \pi\text{-}\breve{\pi} . \frown ' \breve{\omega\pi} \varepsilon$ Elm

[$x \varepsilon \pi\text{-}\breve{\pi} .\supset: v \varepsilon \omega_{\breve{P}} . \supset_v . x \varepsilon v\pi :\supset. x \varepsilon \frown ' \omega\pi$ (1)

$x \varepsilon \breve{\pi}$. Prop 3·11·31 .ɔ. $\exists \omega_{\breve{P}} \frown v \ni (x \varepsilon \breve{\pi v}) . \supset . x\text{-}\varepsilon \frown ' \omega\pi$ (2) (1) . (2) .ɔ. Prop]

·51 $\exists \breve{\pi}\text{-}\pi . \supset . \frown ' \breve{\omega\pi} = \breve{\pi}\text{-}\pi . \frown ' \breve{\omega\pi} \varepsilon$ Elm

·6 $\pi \supset \breve{\pi} \;.\supset.\; \frown{}' \pi\omega = \Lambda$ Dem 3·4 N° (2) .Ↄ. Prop]

.61 $\breve{\pi} \supset \pi \;.\supset.\; \frown{}' \breve{\pi}\omega = \Lambda$

·7 $\pi \supset \breve{\pi} \;.\supset.\; \frown{}' \omega\pi = \Lambda$

·71 $\breve{\pi} \supset \pi \;.\supset.\; \frown{}' \omega\pi = \Lambda$

✱ 4 $P \varepsilon \mathrm{Rel} \,.\, P \supset 0' \,.\, P^2 = P \,.\, u = \pi \frown \breve{\pi} : x \varepsilon u \;.\supset_x.\; \pi x \frown \iota x \frown \breve{\pi} x = u \;.\supset::$

·1 $x T_1 y \;.=.\; x,y \varepsilon \pi\omega \,.\, x \supset y \,.\, x -= y$ Df

·11 $x T_2 y \;.=.\; x,y \varepsilon \breve{\pi}\omega \,.\, x \supset y \,.\, x -= y$ Df

·12 $x T_3 y \;.=.\; x,y \varepsilon \omega\pi \,.\, x \supset y \,.\, x -= y$ Df

·13 $x T_4 y \;.=.\; x,y \varepsilon \omega\breve{\pi} \,.\, x \supset y \,.\, x -= y$ Df

·2 $x \varepsilon \pi\omega \;.\supset.\; \exists\, \omega T_1 \frown z \ni (l'z = x)$

[Prop 3·1 $.\supset: y_1, y_2 \varepsilon u \,.\, y_1 P y_2 \;.\supset_{y_1, y_2}.\; \exists\, \pi\omega \frown m \ni (\pi y_1 T_1 m \,.\, m T_1 \pi y_2)$ (1)

(1) . Prop 2·1·3 . $v \varepsilon \omega P \,.\, x = \pi v : z \varepsilon v \;.\supset_z.\; w_z \varepsilon \pi\omega \,.\, \pi z T_1 w_z \,.\, w_z T_1 \pi(\mathrm{seq}\, z):$

$w = y \ni \{\exists\, v \frown z \ni (y\, l' w_z)\} \;.\because.\supset.\; w \varepsilon \omega T_1 \,.\, l'w = x$]

Cette P preuve que tout terme de $\pi\omega$ (c'est-à dire, tout segment inférieur de u) est la limite supérieure d'une progression de termes de $\pi\omega$. Si v est une progression dans u, x un terme variable de v, πv est la limite des segments πx; mais ce fait ne suffit pas à la démonstration de 4·2, puisqu'on n'a aucune raison de croire que πx appartient toujours à la classe $\pi\omega$, c'est-à-dire que, si x est un u, x est la limite supérieure d'une progression dans u.

.21 $x \varepsilon\, \omega\pi \;.\supset.\; \exists\, \omega\breve{T}_1 \frown z \ni (l_{,} z = x)$

Cette P se déduit de Prop 3·11 comme 4·2 se déduit de 3·1.

·22 $x \varepsilon\, \pi\omega \;.\supset.\; \exists\, \omega T_2 \frown z \ni (l'z = x)$

·23 $x \varepsilon\, \omega\pi \;.\supset.\; \exists\, \omega\breve{T}_2 \frown z \ni (l_{,} z = x)$

·24 $x \varepsilon\, \breve{\pi}\omega \;.\supset.\; \exists\, \omega T_3 \frown z \ni (l'z = x)$

·25 $x \varepsilon\, \omega\breve{\pi} \;.\supset.\; \exists\, \omega\breve{T}_3 \frown z \ni (l_{,} z = x)$

·26 $x \varepsilon\, \breve{\pi}\omega \;.\supset.\; \exists\, \omega T_4 \frown z \ni (l'z = x)$

·27 $x \varepsilon\, \omega\breve{\pi} \;.\supset.\; \exists\, \omega\breve{T}_4 \frown z \ni (l_{,} z = x)$

La démonstration des Prop ·22 — ·27 est semblable à celle de Prop ·2. Il y a huit autres propositions de la même forme que nous ne savons pas démontrer, et qui paraissent ne pas être toujours vraies. Telle est la proposition

$$x \varepsilon\, \pi\omega \;.\supset:\; \exists\, \omega\breve{T}_1 \frown z \ni (l_{,} z = x)$$

·3 $z \varepsilon \omega T_1 \;.\supset.\; l'z\, \varepsilon\, \pi\omega$

[$x \varepsilon z \;.\supset.\; x T \mathrm{seq}\, x \;.\supset.\; \exists\, u \frown y \ni (x T \pi y \,.\, \pi y T \mathrm{seq}\, x)$ (1)

Prop 2·3 : $x \varepsilon z \;.\supset_x.\; v_x \varepsilon u \frown y \ni (x T \pi y \,.\, \pi y T \mathrm{seq}\, x) : v = w \ni \{\exists\, z \frown x \ni (w\, l' v_x)\} \;.\because.\supset.$

$v \varepsilon \omega P \,.\, l'z = \pi v \;.\supset.$ Prop]

.31 $z \varepsilon\, \omega\breve{T}_1 \;.\supset.\; l_{,} z\, \varepsilon\, \omega\pi$

·32 $z \varepsilon\, \omega T_2 \;.\supset.\; l'z\, \varepsilon\, \breve{\pi}\omega$

$\cdot 33 \quad z\varepsilon\ \omega\breve{T}_2 \ .\supset.\ l'z\varepsilon\ \omega\pi$

$\cdot 34 \quad z\varepsilon\ \omega T_3 \ .\supset.\ l'z\varepsilon\ \breve{\pi}\omega$

$\cdot 35 \quad z\varepsilon\ \omega\breve{T}_3 \ .\supset.\ l_{,}z\varepsilon\ \omega\breve{\pi}$

$\cdot 36 \quad z\varepsilon\ \omega T_4 \ .\supset.\ l'z\varepsilon\ \breve{\pi}\omega$

$\cdot 37 \quad z\varepsilon\ \omega\breve{T}_4 \ .\supset.\ l_{,}z\varepsilon\ \omega\breve{\pi}$

Ici aussi il y a huit autres propositions de forme semblable qui ne paraissent pas être toujours vraies. Telle est la proposition.

$$z\varepsilon\ \omega\breve{T}_1 \ .\supset.\ l'z\varepsilon\ \pi\omega$$

Note au § *6*. — On peut maintenant résumer les principaux résultats du § 6.

Une série condensée (une Φ) est une série qui a un terme entre deux quelconques de ses termes. Une telle série se définit par une relation transitive P, qui implique la diversité, et qui est telle que $P^2 = P$. Si xPy, on peut dire que x précède y. S'il y a des termes en dehors de la série considérée qui ont la relation P ou $\breve{P}$ avec d'autres termes, on peut toujours trouver une autre relation, équivalente à P dans la série considérée, et telle que tous les termes qui subissent cette relation ou sa converse appartiennent à la série considérée (§ 5 Prop 1·6). Par conséquent il est plus simple, et non moins général, de prendre comme type de série condensée le domaine complet d'une relation convenable et de sa converse.

Soit u une telle série, P sa relation génératrice. Une progression dans u est une série du type ω, contenue dans u, et telle qu'on a toujours x P seq x, si x est un terme de la progression. Nous appelons ωP la classe des progressions dans u. De même, $\omega\breve{P}$ est la classe des régressions, c'est-à-dire des séries de type ω, pour lesquelles $x\breve{P}$ seq x. On peut construire une ωP et une $\omega\breve{P}$, dont tout terme se trouve entre deux termes donnés quelconques de u.

Toute classe v contenue dans u définit quatre classes dans u:

(1) πv, qui contient tous les termes tels qu-il y a un v qui succède à eux;

(2) $\breve{\pi} v$, qui contient tous les termes tels qu'il y a un v qui les précède;

(3) $v\pi$, qui contient tous les termes qui précèdent tout terme de v;

(4) $v\breve{\pi}$, qui contient tous les termes qui succédent à tout terme de v.

Si v est une progression, (1) et (4) sont seules importantes; pour une régression, (2) et (3) sont seules importantes. Si v est une progression, tout terme de u appartient à (1) ou (4), et (1) n'a pas de dernier terme; mais on ne peut savoir (dans le cas général) si (4) a un premier terme ou non. On a des remarques semblables si v est une régression.

On avance maintenant à la théorle des segments, qui constitue une généralisation de la théorie des nombres réels. On a quatre classes de segments:

(1) La classe $\pi\omega$, qui est formée de toutes les classes πv, où v est une ωP quelconque:

(2) la classe $\breve{\pi}\omega$, qui est formée de toutes les classes $\breve{\pi} v$, où v est une $\omega\breve{P}$ quelconque;

(3) La classe $\omega\pi$, qui est formée de toutes les classes $v\pi$, où v est une ωP quelconque;

(4) La classe $\breve{\omega\pi}$, qui est formée de toutes les classes $\breve{v\pi}$, où v est une ωP quelconque.

Chacune de ces quatre classe est une Φ, donc la relation génératrice se dérive de l'inclusion logique. Tout terme de $\breve{\omega\pi}$ est le produit de u et de la négation du terme correspondant de $\pi\omega$; et de même pour $\breve{\pi\omega}$ et $\omega\pi$. Les classes $\pi\omega$ et $\omega\pi$ peuvent avoir des termes communs; par exemple, si u est la classe des nombres rationels, et v est une progression dans u qui n'a pas de limite rationelle, v' une régression qui détermine la même section (dans le sens de Dedekind). Si u est une série qui satisfait au postulat de continuité de Dedekind, $\pi\omega$ est $\omega\pi$ n'ont pas de termes communs; car alors il y aura un dernier terme dans toute classe qui appartient à la classe $\omega\pi$, et dans aucune classe de $\pi\omega$.

Dans chacune des quatre classes $\pi\omega$, $\breve{\pi\omega}$, $\omega\pi$, $\breve{\omega\pi}$, on peut construire une progression ou une régression, qui aura toujours une limite appartenant à une des quatre classes, mais pas toujours à la classe qui contient la dite progression ou regression. De plus, tout terme de chacune des quatre classes est la limite de certaines progressions, ou bien de certaines régressions, mais non pas nécessairement (à ce qu'il paraît) de toutes les deux; et les termes des dites progressions ou régressions n'ont pas besoin d'appartenir à la même classe que le terme qui est leur limite. Ces résultats sont en définitif les suivants:

Tout terme de $\pi\omega$ est la lim. d'une pr. dans $\pi\omega$ et d'une pr. dans $\omega\pi$
» $\breve{\pi\omega}$ » » $\breve{\pi\omega}$ » $\breve{\omega\pi}$
» $\omega\pi$ » régr. » $\pi\omega$ » $\omega\pi$
» $\breve{\omega\pi}$ » » » $\breve{\pi\omega}$ » $\breve{\omega\pi}$

Toute progression dans $\pi\omega$ ou dans $\omega\pi$ a une limite dans $\pi\omega$
» » » $\breve{\pi\omega}$ » $\breve{\omega\pi}$ » » $\breve{\pi\omega}$
» régression » $\pi\omega$ » $\omega\pi$ » » $\omega\pi$
» » » $\breve{\pi\omega}$ » $\breve{\omega\pi}$ » » $\breve{\omega\pi}$

Donc:

$\pi\omega$ est identique à la classe des limites de progr. dans $\pi\omega$ ou $\omega\pi$
$\breve{\pi\omega}$ » » » » » » $\breve{\pi\omega}$ » $\breve{\omega\pi}$
$\omega\pi$ » » » » régressions » $\pi\omega$ » $\omega\pi$
$\breve{\omega\pi}$ » » » » » » $\breve{\pi\omega}$ » $\breve{\omega\pi}$

Nous n'avons pas réussi à prouver qu'aucune des quatre classes est une série complètement parfaite; mais chacune d'elles est parfaite ou bien à

droite ou bien à gauche, c'est-à-dire ou bien pour les régressions, ou bien pour les progressions. La somme logique de $\pi\omega$ et $\omega\pi$, ou de $\overset{\smile}{\pi\omega}$ et $\overset{\smile}{\omega\pi}$, est une série parfaite; mais cette série ne sera en général pas condensée. Car s'il existe dans u une progression v et une régression v' ayant la même limite dans u (ce qu'on sait être possible), alors πv et $v'\pi$ seront consécutifs dans la série $\pi\omega \cup \omega\pi$, car $v'\pi$ ne contiendra qu'un seul terme qui n'appartient pas à πv, savoir la limite commune. Donc $\pi\omega \cup \omega\pi$ n'est pas en général une série continue.

Nous n'avons pas réussi à prouver qu'aucune progression ou régression dans u ait une limite, quoique nous ne connaissions pas d'exemple d'une série condensée dont aucun terme n'est un élément principale (dans le langage de M. G. Cantor). Nous ne savons non plus prouver qu'il y a des termes de $\pi\omega$ qui sont des limites de régression, etc.

On sait d'après M. G. Cantor comment prouver tous ces théoremes si u est une série dénombrable [RdM. V, pp. 129-162]. Nous ne développons pas ce sujet, puisqu'il n'a été traité à fond par M. Cantor. Dans le § 6 nous avons seulement voulu déduire les résultats qui sont valables pour toute série condensée, sans introduire d'autres conditions.

BERTRAND RUSSELL.

Recensione.

L. COUTURAT — *La logique de Leibniz d'après de documents inédits*, Paris Alcan 1901.

Che l'esame dei manoscritti di Leibniz, a distanza di un paio di secoli dalla sua morte, abbia potuto ancora dar materia al rintracciamento di frammenti o di opere, paragonabili per valore e interesse a quelle che di quel gran pensatore erano finora pervenute a cognizione del pubblico, è un fatto che può sembrar strano e poco credibile a chi non ponga mente al genere delle questioni alle quali quei frammenti si riferiscono.

Tali questioni appartengono infatti ad un campo di ricerche il cui accesso richiede, come condizione indispensabile, il possesso simultaneo di cognizioni e attitudini intellettuali che, riunite eccezionalmente ed eminentemente in Leibniz, vennero poi in certo modo a essere ripartite fra le due classi, ben distinte e quasi antagonistiche, dei suoi eredi intellettuali, cioè, da una parte i matematici e dall'altra i cultori degli studi filosofici.

Ciò rende anche, nello stesso tempo, ragione di un altro fatto notevole, messo chiaramente in luce dal presente volume del Couturat, che, cioè, perfino negli scritti del Leibniz, già da tempo pubblicati, le parti che toccano più davvicino gli argomenti a cui abbiamo sopra alluso, cioè in particolare i vari metodi di rappresentazione simbolica dei ragionamenti deduttivi e il concetto generale di un algoritmo operatorio (calculus ratio-

cinator), sembrano non aver quasi richiamato sopra di sè alcuna attenzione ed essere giaciute non meno neglette o ignorate di quelle altre parti, ad esse affini, che gli editori delle opere di Leibniz non avevano finora neppur stimate degne della pubblicazione.

Eppure, come ha ragione di notare il Couturat, è precisamente alle ricerche e alle considerazioni in esse esposte che è necessario far capo per rendersi conto della origine prima e delle intime sorgenti da cui derivarono, per espressa testimonianza del Leibniz stesso, tanto le sue idee filosofiche più originali quanto le sue scoperte nel campo della matematica. Sì le une che le altre sono da lui infatti insistentemente presentate come delle semplici « applicazioni » di quelle sue speculazioni generali sulla logica deduttiva e sull'arte di scoprire (Combinatoria characteristica et ars inveniendi) alle quali egli non ha mai cessato di attendere in ogni fase della sua vita intellettuale, e delle quali le traccie ci sono rimaste in quella serie di frammenti e di tentativi che, già segnalati su questa Rivista dal Vacca, sono ora per la prima volta dal Couturat presi in considerazione nel loro insieme, e analizzati e comparati in rapporto al concetto fondamentale di cui rappresentano lo svolgimento.

Tale concetto è quello della possibilità di estendere al di fuori del campo dell'algebra, e della matematica in generale, quei processi di deduzione automatica che, basati su un'analisi rigorosa delle idee fondamentali e sull'uso di opportune notazioni ideografiche, si sono ivi dimostrati tanto fecondi ed efficaci come mezzi di accertamento e di indagine.

* * *

È ai suoi primi studi sulla logica scolastica e al fascino che, come egli stesso ci informa, questi esercitarono su di lui fin dai suoi anni più giovanili, che occorre risalire per trovare il primo germe delle sue meditazioni su questo soggetto. (Mihi adhuc puero necdum nisi vulgaris logicae placita noscenti, expertique matheseos *nescio quo instinctu* subnata cognitio est posse excogitari aliquam analysin notionum unde *combinatione quadam exsurgere veritates et*, *quasi numeris*, *aestimari possint*. Elem. Rationis) Couturat, pag. 34.

Nello scritto *De Arte combinatoria*, da lui pubblicato mentre non era ancora ventenne (1666), e il cui titolo sembra accennare a un'ulteriore influenza esercitata su lui dagli scritti di Raimondo Lullo, questo germe è già sviluppato al punto da indurlo a un tentativo sistematico di rappresentazione simbolica dei concetti della geometria elementare mediante riduzione di essi a un certo numero (precisamente ventisette) di nozioni primordiali (notiones primitivae) che egli designa con numeri progressivi. Da queste coll'uso di pochi altri segni, indicanti le varie specie di relazioni e di « combinazioni » che tra essi si possono stabilire, egli costruisce le definizioni di tutti gli altri. Tali definizioni sono da lui distribuite in varie classi, in ciascuna delle quali sono successivamente combinati i concetti le cui definizioni figurano nelle classi precedenti.

Non è senza importanza notare a questo riguardo come egli insista

continuamente sull'analogia che questo processo di decomposizione e successiva ricomposizione di concetti presenta con quelli aritmetici di decomposizione d'un numero nei suoi fattori primi, e di successiva ricostruzione dei suoi divisori per mezzo di prodotti parziali fra questi.

La dimostrazione d'una proposizione generale: « *Ogni A è B* », è concepita da Leibniz come consistente nel porre in chiaro, per mezzo di una sufficiente analisi del significato dei suoi termini, che l'insieme delle proprietà che, prese insieme (*simul sumptae*) costituiscono la nozione B, *fà parte* dell'insieme delle proprietà che costituiscono la nozione A.

Prendendo le mosse da questo concetto, egli si propone anzitutto di determinare, dato un numero limitato di « nozioni primitive », quale sarà il numero nelle proposizioni « dimostrabili » che si possono costruire, assumendo *come soggetto* (o *come predicato*) una determinata nozione « complessa » (costituita cioè da un determinato gruppo delle nozioni primitive date).

Per quanto riguarda le proposizioni generali affermative, la prima delle suddette questioni è da lui risolta seguendo un procedimento analogo a quello che conduce a determinare il numero dei divisori d'un dato numero (che sia prodotto da numeri primi tutti diversi fra loro); la seconda, quella cioè di determinare il numero delle proposizioni di dato predicato, è parimenti ridotta a quella di determinare, quando sia data una classe finita di numeri primi, quanti sono i multipli d'un numero dato (eguale al prodotto d'un certo numero di essi) che si possono ottenere moltiplicandolo per l'uno o l'altro dei prodotti risultanti dalle diverse combinazioni (senza ripetizioni) di quelli, tra i numeri primi dati, che non figurano tra i suoi fattori.

Per quanto riguarda le proposizioni particolari affermative di dato soggetto Leibniz si limita ad osservare che, poichè la proposizione « *Qualche A è B* » non può, in conformità alle note regole di conversione e di subalternazione della logica scolastica, esser dedotta se non dall'una o dall'altra delle proposizioni generali affermative che hanno *A* per soggetto e B per predicato oppure *B* per soggetto ed *A* per predicato, il numero di quelle tra esse che sono " dimostrabili „ sarà dato dalla somma dei due numeri sopra calcolati, rispettivamente, per le proposizioni generali di dato soggetto e per le proposizioni generali di dato predicato.

Dopo aver così calcolato il numero delle proposizioni affermative " dimostrabili „ che si possono costruire colla combinazione d'un dato numero di nozioni " primitive „, Leibniz, proseguendo in queste sue ricerche di " logica enumerativa „, si propone di determinare anche il numero delle diverse dimostrazioni che di ciascuna di esse è possibile trovare e, in particolare, data una proposizione universale affermativa " dimostrabile „ " *Ogni A è B* „, quanti sono i sillogismi che si possono costruire (sempre nell'ipotesi di un numero limitato di nozioni primitive) aventi per *conclusione* la detta proposizione. Tale numero, corrispondendo a quello delle nozioni complesse che in tali sillogismi possono fungere da " termine medio „, è da lui calcolato determinando, nel modo già visto sopra, il numero delle

nozioni " complesse „ atte a figurare *nello stesso tempo* come predicati di proposizioni generali affermative aventi A per soggetto, e come soggetti di proposizioni generali affermative aventi B per predicato. E analoghe considerazioni, sebbene alquanto più oscure e complicate, sono da lui pure applicate al caso dei sillogismi aventi per conclusione una data proposizione generale negativa.

***

Giova notare, prima di passare all'esame degli altri scritti logici di Leibniz posteriori al " *De arte combinatoria* „, come egli, pur qualificando questo suo primo lavoro come un " *essay d'escolier* „, aggiunge; " *mais le fond est bon et j'ay basti la-dessus* „.

In una serie di saggi portanti la data del 1679, troviamo infatti Leibniz occupato a costruire, sulla base dell'analogia sopraindicata tra l'analisi dei concetti e la decomposizione dei numeri nei loro fattori, e coll'ulteriore impiego del segno di negazione, un sistema coerente di notazioni simboliche atto a rappresentare, non solo le varie specie di proposizioni, ma anche le trasformazioni e le operazioni deduttive che su essa si possono effettuare.

Egli osserva anzitutto come, dato un sistema di " nozioni primitive „ $a, b, c...$, basta far corrispondere ordinatamente ad esse dei numeri primi per es. 2, 3, 5, 7, etc. per poter indicare, senza alcun pericolo d'equivoci, ogni nozione " complessa „, derivante da qualsiasi loro combinazione, mediante il numero corrispondente al prodotto dei numeri primi designanti le nozioni primitive dalle quali tale nozione complessa è costituita.

Così per es. se con 2 e 3 si indicano rispettivamente i concetti " animale „ e " ragionevole „, il numero 6 indicherà " animale ragionevole „.

Se nella definizione della nozione complessa che si tratta di rappresentare simbolicamente, entrano, oltre ad alcune delle nozioni date anche le negazioni di alcune di esse, egli conviene di rappresentarla con due numeri, uno dei quali sia il prodotto dei numeri primi corrispondenti alle nozioni " positive „ e l'altro il prodotto di quelli che corrispondono alle nozioni negative, e di distinguere tali due prodotti l'uno dall'altro prefiggendo al secondo il segno — di negazione.

Così per es., avendo 2 e 3 i significati sopra indicati, se indichiamo con 5 e 7 rispettivamente i concetti: " europeo „, " ricco „, l'espressione simbolica:

$$(6, -35)$$

esprimerà il concetto: " animale ragionevole, non ricco, non europeo „.

Dati due numeri qualunque n, n' (che siano prodotti di fattori primi appartenenti all' " alfabeto „ introdotto per notare le nozioni primitive poste a base d'una data trattazione) si potrà constatare subito se la nozione corrispondente al simbolo : $(n, -n')$ sia " possibile „ (cioè non contraditorio) verificando se i due numeri n, n' sono primi tra loro (poichè in caso contrario la nozione in questione conterrebbe un fattore della forma $a - a$).

Per verificare poi se la nozione $(n, -n')$ possa figurare come soggetto in una proposizione universale affermativa, avente per predicato un'altra

data nozione $(m, -m')$, basterà, in conformità a ciò che abbiamo visto indietro, verificare se n è divisibile per m e inoltre anche n' per m'.

Condizione invece perchè si verifichi la proposizione generale negativa avente per soggetto $(n, -n')$ e per predicato $(m, -m')$, è che i due numeri n ed m', *oppure* gli altri due n' ed m abbiano un fattore comune.

Le corrispondenti regole per le proposizioni particolari, sono da Leibniz ridotte a quelle sopra enunciate per le proposizioni generali, osservando che le proposizioni particolari, affermative e negative, equivalgono rispettivamente alla negazione delle corrispondenti proposizioni generali negative o affermative.

Dal fatto che i numeri m, n ; m' n' entrano simmetricamente nell'enunciato delle condizioni di validità sopradette, relative alle proposizioni generali negative e particolari affermative, Leibniz deduce immediatamente la nota regola scolastica della " conversio simplex ,, e con analoghe considerazioni cerca di dimostrare quelle relative alla " conversione per contrapposizione ,, (Formul. a. 1901 2·4), alla " conversione parziale ,, non che quelle relative alla validità dei sillogismi delle varie figure. Ma le difficoltà e le complicazioni contro cui vennero ad urtare i suoi tentativi di estendere questo metodo di dimostrazione a tutte le norme della logica scolastica sembrano averlo indotto a rinunziare a ogni ulteriore elaborazione di tale simbolismo logico-aritmetico.

*
* *

La sola traccia importante che queste due prime idee relative all'analogia tra l'analisi dei concetti e la decomposizione dei numeri in fattori, abbiano lasciato nei suoi scritti posteriori è rappresentata dalle convinzione, da lui non mai abbandonata anche in seguito, di una distinzione " assoluta ,, tra nozioni " primitive ,, e nozioni " derivate ,,, distinzione che, come quella tra numeri primi (" primitivi ,,) e numeri non primi, egli riguardava come affatto indipendente da qualunque considerazione relativa all'ordine e alla forma delle singole trattazioni. (Cfr. *Formulaire* 1901, p. 7).

Un'altra osservazione, da non omettere a questo proposito è quella della perfetta coincidenza tra la corrispondenza stabilita da Leibniz tra la proposizione: *a est b*, e l'altra: a *è divisibile per* b, e la corrispondenza indicata nel Formulario (a. 1901 p. 23) tra le due proposizioni;

$x \varepsilon \text{Cls} . a \supset b$

$x \varepsilon$ N . a *est un diviseur de* b.

Poichè, infatti, Leibniz designa, con a, b, non le *classi*, ma le *condizioni* da cui le classi sono determinate (1), la proposizione *a est b* significa, per lui, non l'inclusione di una classe a in un'altra b, ma invece, come già accennammo, l'inclusione dell'insieme di condizioni che definiscono la classe b nell'insieme di condizioni che definiscono la classe a; la qual cosa, applicando a tali insiemi o classi di condizioni, le notazioni del Formulario (Cfr. ed. 1901 p. 5), si esprimerebbe scrivendo: $b \supset a$ (2).

---

(1) « De ideis loquimur non de individuis ».

(2) « *A est B idem est quod* A *continet* B » (Cfr, Couturat p. 345).

Un'analoga considerazione spiega come, per Leibniz, al minimo comun multiplo di due numeri, venga a corrispondere, non la *somma logica di due classi,* ma la classe formata dagli individui godenti della *somma logica delle condizioni* a e b, cioè il *prodotto logico delle due classi* definite rispettivamente dalle condizioni *a* e *b*.

*
* *

Una fase ulteriore delle speculazioni di Leibniz sulla logica è rappresentata dai due scritti " *Specimen calculi universalis* „ e " *Ad specimen calculi universalis addenda* „, che, nelle edizioni di Erdmann e di Gerhardt, furono pubblicati solo in parte.

In essi Leibniz comincia ad enunciare un certo numero di assiomi logici (*propositiones per se verae*), tra i quali, oltre quelli che si riferiscono alla proprietà commutativa dell'operazione logica fondamentale da lui considerata, cioè del prodotto di due classi, (o della somma delle condizioni che le definiscono), figurano il principio d'identità (*a est a*) e l'altro: *ab est a*. (V. Formul. 1901 § 1, 5·3 e § 2, 1·3).

Da questi, coll'aggiunta del principio del sillogismo (" *Si a est b, et b est c, a est c* „), egli deduce una serie di altre proposizioni esprimenti le note proprietà dell'operazione logica suddetta, e, in primo luogo, quelle relative alla " composizione „ e " decomposizione „ dal predicato d'una proposizione universale, cioè:

" Si a est b et a est c, a est bc „

" Si a est bc, a est b et a est c „

A questi due enunciati egli fà seguire l'osservazione che, per quanto riguarda invece il soggetto, è lecita la " composizione („ *si a est c, et b est c, ab est c* „), ma non la " decomposizione „, non potendosi da *ab est c* dedurre *a est c*, nè *b est c*.

Dimostra, in seguito, la proposizione:

" *Si a est b, ac est bc* „ (Formul. 1901 § 1, 5·5, § 2, 1·5)

deducendone, nel modo pure indicato nel Formulario (§ 1, 5·6), il " *praeclarum theorema* „:

" *Si a est b et c est d, ac est bd* „.

Alla domanda se, reciprocamente, dalla proposizione: *ac est bc,* si possa dedurre l'altra: *a est b*, egli risponde che condizione necessoria è sufficiente perchè tale deduzione sia lecita è che *b* e *c non abbiano elementi comuni* (*non sint intercommunicantia*) col che egli intende significare che le due nozioni *b* e *c*, decomposte l'una e l'altra nelle " nozioni elementari „ che le costituiscono, non abbiano alcuna " nozione elementare „ in comune. Per esprimere una tale relazione di *non-intercommunicatio* tra due classi di condizioni *b, c,* Leibniz non ha a disposizione alcun simbolo. L'indicarla, come fa il Couturat, scrivendo

bc = o

è certamente lecito purchè però si avverta che il prodotto *bc*, in questa formola, rappresenta un'operazione affatto diversa da quella indicata da Leibniz scrivendo *ac* o *ab* (per es. nella proposizione *ab est ac*). Con *ab* infatti Leibniz come vedemmo rappresenta l'insieme delle condizioni che co-

stituiscono la nozione a e la nozione b (cioè la *somma logica* di tali condizioni, somma logica alla quale corrisponde il *prodotto* logico delle classi corrispondenti); il *bc* invece che figura nella formola sopradetta, vuol indicare il *prodotto logico* delle classi di condizioni designate con *b* e *c*.

Ne segue che, se si adotta la suddetta convenzione del Couturat (ed è necessario adottarla se si vuol tradurre in simboli il teorema enunciato da Leibniz) la proposizione in questione, enunciata coi simboli del Formulario, dà luogo alla seguente formola:

$$a,b,c \varepsilon \text{Cls} . b \cup c \supset a \cup c . bc = \Lambda :\supset b \supset a$$

la quale esprime una proposizione vera e non soggetta ad alcuna delle critiche che il Couturat muove all'enunciato di Leibniz (a p. 341, Nota 4).

* * *

Come documento delle varietà di significati attribuiti da Leibniz ai simboli di cui fa uso è notevole un frammento (inedito) portante la data del 1684, e nel quale l'espressione *x est abc* è assunta per indicare ciò che ora si chiamerebbe la *somma* logica delle proposizioni: *x est a*, *x est b*, *x est c*.

Tra le proprietà dell'operazione così definita, che ivi sono prese in considerazione, figura in primo luogo la seguente: " *Si x est abcde et y est cefg x est c* ,, colla quale Leibniz intende rappresentare in simboli il procedimento seguito dai geometri per determinare un punto come intersezione di due o più suoi *luoghi*, o anche dagli indovini per trovare un oggetto date due o più classi di oggetti a cui esso contemporaneamente appartenga. (Couturat p. 344).

* * *

Nel saggio di poco posteriore (1686) portante il titolo " *Generales inquisitiones de analysi notionum et veritatum* ,, l'espressione *a est bc* torna ad assumere il significato che aveva, come vedemmo, nello " *Specimen calculi universalis* ,,, e ad essere definita come equivalente al sussistere simultaneo delle due proposizioni *a est b*, *a est c*. Gli assiomi posti a base della trattazione nello *Specimen*, vengono rienunciati con qualche modificazione ed aggiunta (tra cui quella relativa alla proprietà della negazione: non non A=A).

Ciò che caratterizza questo saggio è la tendenza ad esprimere le relazioni di " inclusione ,, mediante quelle di " uguaglianza ,,. Così la proposizione *A est B* viene espressa colla formola: A=BX la quale indica che, per ottenere l'insieme delle condizioni che definiscono la classe A, occorre assumere, oltre alle condizioni che definiscono la classe B, anche un certo numero di ulteriori condizioni il cui insieme è designato dalla lettera X. (Cfr. Formul. §∃ 1·4).

Dalla formola A=BX egli deduce l'altra A=AB, moltiplicando la prima per B e sostituendo nell'espressione così ottenuta (cioè in AB=BX, a BX, il suo valore A).

Basandosi sulle quali premesse, egli dimostra il principio del sillogismo: *Si A=AB et B=BC, A=AC.* (Sostituendo nella prima di dette uguaglianze il valore di B, dato dalla seconda, ottiene prima A=ABC, e da questa, sostituendo in essa ad AB il suo valore A, dato dalla prima, ricava: A=AC. Non enuncia però la proprietà associativa di cui qui fa uso implicitamente).

L'applicazione di questo stesso metodo di rappresentazione alle proposizioni particolari fu da Leibniz tentato in diverse riprese e in vari modi, i quali si possono ridurre a due tipi: quelli cioè consistenti nel far precedere anche il soggetto da un segno di " classe indeterminata ,, (come fecero più tardi anche Boole e Jevons) e quelli basati invece sulla considerazione, a cui Leibniz, come vedemmo, era già ricorso in una precedente occasione, che le proposizioni particolari, affermative o negative, equivalgono rispettivamente alle corrispondenti proposizioni universali negative o affermative.

In questo secondo caso egli rappresenta le proposizioni: *Qualche A è B, Qualche A non è B*, non solo colle formole:

A non = X non B　　　　A non = XB,

ma anche colle altre assai più convenienti:

AB est res　　　　A non B est res,

dimostrando poi l'equivalenza delle espressioni:

AB non est res　　　　A non B non est res

con quelle da lui prima adottate

A=A non B　　　　A=AB

per le proposizioni generali.

Il fatto però che con questo sistema di notazione veniva a essere pregiudicata la questione del significato " esistenziale ,, delle proposizioni generali, questione da cui dipendeva l'altra delle legittimità delle regole della logica scolastica relative alla " conversione ,, e alla " subalternazione ,, , sembra esser stato d'ostacolo a che Leibniz traesse tutto il partito possibile da queste sue idee di cui l'ulteriore sviluppo della logica matematica mise più tardi in luce l'importanza.

* * *

Lo stesso si può dire anche d'un'altra idea contenuta in questo stesso opuscolo (Generales inquisitiones etc.) quella cioè dell'analogia tra le relazioni di *deducibilità,* o di *equivalenza* di proposizioni, e le relazioni di *inclusione* o di *coincidenza* di classi, idea che sembra essere stata suggerita a Leibniz dal " parallelismo ,, (già notato da Pascal) tra i processi d'analisi e *definizione* delle nozioni e i processi di *dimostrazione* e di *riduzione* delle proposizioni le une alle altre.

Allo stesso modo, egli osserva, come la proposizione " *A est B* ,, significa che le condizioni richieste per l'applicazione del nome A, implicano, o contengono, le condizioni indicate dal nome B, così la proposizione:

" *Si A est B,*　　　*C est D* ,,

esprime che l'affermazione (1) A est B, *contiene*, o implica come conseguenza, la proposizione " *C est D* ,,; per modo che essa può essere indicata con:

(*A continet B*) *continet* (*C continet D*)

o anche: (*A est B*) *est* (*C est* D).

La perfetta conformità tra le proprietà della copula " est ,, (o " continet ,,), nei due casi, è, da Leibniz, riconosciuta ed enunciata in modo non meno chiaro ed esplicito di quanto avvenne più tardi per parte di Peano (1888) e Schröder (1891):

Per A *aut* B *intelligo vel terminum vel enunciationem*. (Couturat p.355).

È notevole a questo riguardo l'analisi che egli fa del senso delle congiunzioni " sebbene ,, , " tuttavia ,, (*etsi, tamen*) le quali servono a *negare* che le due proposizioni, tra cui figurano, siano deducibili l'una dall'altra, cioè ad esprimere, per le proposizioni, il sussistere di quelle relazioni che, nel caso delle classi, sono espresse dalle proposizioni particolari (2).

Con frasi poco differenti da quelle usate poi da Boole egli afferma che " *veritates absolutae* (cioè categoriche) *et hypotheticae easdem habent leges et iisdem generalibus theorematibus continentur* ,, , ed interpreta la proposizione A *est* B come perfettamente equivalente alla seguente:

" *Si* L *est* A, L *est* B *quelque soit* L ,..

(Couturat pag. 355, nota 6, Formul. 1901 §1, 4·3.

* * *

Posteriore a quelli finora esaminati è ritenuto dal Couturat lo scritto: *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*. Anche in questo Leibniz dopo aver definito la relazione di " identità ,, (1), cerca di ridurre ad essa tutte le altre relazioni della logica e in particolare quella di " inclusione ,, che egli definisce nel seguente modo:

" Si plura *simul sumpta* coincidant uni, plurium quodlibet dicitur *inesse* vel *contineri* in uno isto. Ipsum autem unum dicitur continens ,, (Couturat pag. 365).

Il che è anche da lui espresso in simboli dicendo che " A inest B ,, equivale a: " B=A+X.

E importante notare come la dipendenza che Leibniz viene così a stabilire tra il senso che egli attribuisce al segno + e quello che attribuisce alla copula *inest*, fa sì che, per lui, anche il primo sia suscettibile di rappresentare due operazioni logiche diverse a seconda che la parola *inest* che figura nella sua definizione è interpretata come esprimente l'inclusione di una classe (soggetto) in un'altra (predicato) o invece come esprimente la *inclusione* delle condizioni che definiscono una classe (predicato) tra le condizioni che definiscono un'altra classe (soggetto).

---

(1) *Cum dico A est B, et A et B sunt propositiones, intelligo ex A sequi B.* (Couturat, pag. 355, nota 1).

(2) « A est vraie *quoique* B soit vraie » se traduit par: « *De ce que B soit vraie il ne s'ensuit pas que A soit fausse* (Cfr, Couturat, pag. 357, nota 2),

Che Leibniz, nello scritto di cui ora parliamo, oscilli, in certo modo, continuamente tra tali due interpretazioni della copula *inest* è messo fuor di dubbio dagli esempi di cui fa uso. Così egli esemplifica le due proposizioni: " A inest B ", " B inest C " colle seguenti: " *Quadrilaterum esse, inest parallelogrammo, et parallelogrammum esse, rectangulo* ", aggiungendo però subito: " *Inverti haec possunt* si *pro notionibus per se consideratis, spectemus singularia* sub *notione comprehensa, et fieri potest* A *rectangulum*, B *parallelogrammum*, C *quadrilaterum*. (Couturat pag. 374, nota 1).

Ora il fatto che, a seconda che si adotti l'una o l'altra delle due interpretazioni per l'*inest*, il segno $+$ viene a rappresentare, rispettivamente, la *somma logica delle due classi* tra i cui segni è posto, o la *somma logica delle condizioni* da cui tali classi sono definite (somma logica a cui corrisponde, come già si osservò, il prodotto logico delle classi rispettive), basta a mio avviso a giustificare le citazioni storiche, tratte appunto dall'opera di Leibniz di cui ora parliamo, che si trovano nel §2 del Formulario 1901 (riportate in seguito alle proposizioni dall'1·3 all'1·6 e dal 2·1 al 2·6).

Poichè infatti, nello scritto in questione, ciò che Leibniz esprime, promiscuamente, talvolta scrivendo $A+B$, talvolta scrivendo semplicemente $+ AB$ (2), è in fondo sempre *la stessa* operazione logica, o più precisamente *le stesse* due operazioni di logica (cioè la *somma delle condizioni* definienti due classi, e il *prodotto delle classi stesse*), le varie proprietà che egli enuncia dell'operazione $+$ che egli considera, possono tanto riguardarsi come riferentisi a quella che attualmente si chiama *moltiplicazione* logica quanto a quella che ora si chiama l'*addizione*, purchè solo si avverta che, in questo secondo caso, le classi di cui parla Leibniz, e che egli indica un a e b, sono " classi di condizioni ".

È da notare infine a tale proposito come l'osservazione che fa il Couturat (pag. 373) a proposito delle seguenti proposizioni cominciate da Leibniz:

" Da A *inest* B+C non si può dedurre " A *inest* B ", non esclude affatto che questa pure, come le rimanenti, corrisponda, per Leibniz, nello stesso tempo all'una e all'altra delle due seguenti asserzioni:

1) Dal dire che la classe di condizioni A *è contenuta* nella somma delle due classi di condizioni B e C non si può dedurre che essa sia contenuta nella classe di condizioni B. (Il che si esprimerebbe in simboli dicendo che da $A \supset B \cup C$ non si deduce $A \supset B$);

2) Dal dire che la classe, determinata dalla condizione A, contiene quella determinata dalla somma delle condizioni B e C, non si può dedurre che essa contenga quella determinata dalle sole condizioni B. (Il che, indicando con a, b, c, le classi determinate rispettivamente dalle condizioni A, B, C si esprimerebbe in simboli dicendo che: da $bc \supset a$ non si deduce $b \supset a$).

---

(1) *Eadem* sunt quorum alterutrum ubilibet potest substitui salva veritate ».

(2) *Pro A+B posset simpliciter poni AB* (Couturat pag. 364).

*
* *

Un'analoga avvertenza è pure da ripetere per ciò che riguarda la " sottrazione logica ,, , definita, nello stesso opuscolo, da Leibniz, nel seguente modo:

" Se A contiene B e se C contiene tutto ciò che è contenuto in A, eccetto ciò che è contenuto in B, si dirà che C è uguale ad A—B ,,.

Venendo così infatti anche il concetto di " sottrazione ,, , come prima quello di addizione, a dipendere da quello di " *inclusione* ,, anch'esso verrà a partecipare della stessa duplicità di senso che abbiamo notata nel caso dell'addizione.

Ciò è messo in chiaro dagli esempi stessi che Leibniz cita, per la relazione A — B = C, tra i quali figura il seguente: Homo — Rationalis = Brutum, corrispondente alla formola:

Homo = Brutus + Rationalis (1).

Il diverso significato del segno di sottrazione (detractio) e di quello di negazione (" non ,,) è caratterizzata da Leibniz col dire: A non A est absurdum, A—A est nihil, e il contrasto tra le proprietà dell'uno e dell'altro è espresso dicendo che: " *non* ,, repetitum se ipsum tollit. *Detractio* repetita non tollit se ipsam sed terminos cui praefigitur... Verbi gratia A *non non* B est AB, sed A — — B est A ,,. (Cfr. Couturat pag. 379, nota 1).

Leibniz tenta pure di estendere la sua definizione di A—B anche al caso in cui la condizione che " A *sia contenuto in* B ,, non sia soddisfatta. L'espressione A—B è allora da lui designata come esprimente un' " aspettativa di sottrazione (*expectatio dectractionis*), e paragonata ai numeri negativi dell'Algebra, in quanto, quando essa figuri come aggiunta a un segno di classe C, tale che C+A contenga B, dà luogo all'espressione: C+A—B, il cui significato è determinato dalla definizione già data sopra.

Chiuderò questa rapida rassegna degli scritti logici di Leibniz, compita colla scorta del volume del Couturat, notando col Couturat stesso, come, mentre per ciò che riguarda la proprietà delle operazioni fondamentali della logica (presa ognuna a sè o nei suoi rapporti colle relazioni di " inclusione ,, o di " coincidenza ,,), ben poche siano quelle, ora note, di cui negli scritti di Leibniz non si riscontri l'enunciato, sotto forma più o meno esplicita e determinata, per ciò che riguarda invece quelle che si potrebbero chiamare le proprietà *vicendevoli* delle dette operazioni, per es. la reciproca distributività della somma e del prodotto logico (Lambert-Peirce), o la definibilità di ciascuna di queste due operazioni per mezzo dell'altra e del segno di negazione (De Morgan) ecc., egli sembra aver lasciato quasi tutto da fare ai suoi successori.

La sua costante preoccupazione di non scindere le considerazioni re-

---

(1) Altrove dice anche: *Si A = triangulum, B = aequilaterale* A + B *erit « triangulum aequilaterale »*.

lative all'inclusione o all'eguaglianza tra classi da quelle relative alla coincidenza, parziale o totale, delle condizioni che le definiscono, lungi da facilitargli il riconoscimento di quel principio di " dualità ,, (più tardi scoperta dal De Morgan) da cui dipende tanta parte della semplicità e della simmetria che caratterizza attualmente il calcolo logico, sembra esser stato per lui il principale ostacolo a una concezione netta della somma e del prodotto logico, come di due operazioni fondamentalmente distinte tra loro (per quanto godenti di comuni proprietà), e come suscettibili perciò di essere considerate nei loro reciproci rapporti.

La parte del volume del Couturat, alla cui considerazione mi sono limitato nel presente resoconto, quella cioè direttamente riferentesi al simbolismo della logica matematica non è certamente la sola che contenga documenti e osservazioni di cui sarebbe opportuno l'esame e la discussione su questa Rivista.

Il contenuto tuttavia delle parti rimanenti, pur riattaccandosi alle speculazioni logiche di Leibniz, e pur concernendo argomenti ad esse intimamente connessi, quali il calcolo geometrico, la costruzione d'un linguaggio scientifico universale, il progetto d'un' enciclopedia del sapere umano, ecc., potrà senza inconvenienti, e anzi con vantaggio, formare oggetto di altri speciali resoconti.

G. VAILATI

Bari, 12 ottobre '01.

DIZIONARIO DI MATEMATICA

Un *Dizionario di Matematica,* cioè una raccolta dei termini che si incontrano nelle opere matematiche attuali, insieme alle osservazioni che servono a precisare il significato o i significati d'ogni termine, quali l'etimologia, la storia, la definizione, quando è possibile, riuscirà un lavoro utile tanto sotto l'aspetto scientifico quanto sotto quello didattico.

La moltiplicità dei termini usati per rappresentare una stessa idea, e la moltiplicità dei significati in cui è usato uno stesso termine costituiscono un inconveniente troppo diffuso e ben noto.

Il Dizionario potrà guidare individualmente ogni autore nella scelta dei termini più opportuni pel suo lavoro.

Esso è pure il lavoro preparatorio onde ottenere una terminologia scolastica uniforme; questione questa di alta importanza e a cui si interessa la Società « Mathesis », e di cui dottamente riferì il prof. E. DE AMICIS nel Congresso tenutosi a Torino nel 1898.

Esistono libri aventi lo stesso titolo del precedente, quali:

G. S. KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch.* Leipzig a.1803-1831, 5 vol.

cui fa seguito il

« Supplement » von J. A. GRUNERT. Leipzig a.1833-36, 2 vol.

A. S. DE MONTFERRIER, *Dictionnaire des sciences mathémathiques pures et appliquées.* Paris a.1838, 3 volumi. (Altre copie portano l'indicazione Paris a.1845).

H. SONNET, *Dictionnaire des Mathématiques appliquées.* Paris a.1867, 2 vol.

Ma queste opere voluminose contengono sotto ogni nome le proprietà principali dell'oggetto indicato da quel nome. Ad es. sotto il nome di *Derivata* si troverà un sommario di calcolo differenziale. Esse sono enciclopedie, e come tali non possono competere coi trattati comuni, perchè disponendo i vari soggetti in ordine alfabetico, si perde completamente l'ordine logico, che ha importanza fondamentale in tutti i trattati.

Essi poi non contengono quasi mai l'etimologia e storia deí nomi, elemento importantissimo pel perfezionamento della terminologia.

Infine essendo fatti da una sola persona, per quanto dotta e laboriosa, hanno sempre un'impronta personale; le inesattezze ed errori che inevitabilmente si riscontrano in opere di questa natura non possono più essere corrette, non essendosi ristampate edizioni ulteriori.

L'opera recente

F. MÜLLER, *Vocabulaire Mathématique (français-allemand)*. Leipzig a.1900 p.XII+132.

è voluminoso perchè consta in gran parte di termini antiquati, e di termini proprii all'astronomia, all'astrologia, ecc.

Esso poi si limita in generale a dare la corrispondenza fra le parole francesi e le tedesche.

Eccono un estratto:

Abaciste, *Abacist*
abaisser, *erniedrigen*
abaque, *Abacus.*

Di qui non si ricava alcun significato dei termini. Anzi, essendo i termini matematici in gran parte internazionali, il dizionario si limita a una variazione di desinenze.

Vedasi pure MÜLLER, *Ueber der Mathematische terminologie* BM. a. 1901 p.282-325.

Per quanto possano essere utili i lavori precedenti, nessuno risponde alla questione.

Ritengo che il dizionario matematico, quale ora si intrapprende, avrà un piccolo volume, come ne fa fede la parte che segue.

È sommamente utile che il dizionario sia un lavoro di collaborazione, e che prima della stampa definitiva esso sia visto da un gran numero di persone. E ciò per togliere ogni carattere individuale al lavoro; perchè necessariamente un solo autore imprime al suo lavoro un carattere unilaterale. Inoltre la raccolta riuscirà più completa, potendo ognuno aggiungere quel nuovo termine, o quel nuovo significato d'un termine che crederà più opportuno.

Il libro riuscirà emendato dalle sviste in cui si cade necessariamente in un lavoro di qaesto genere.

Sarà bene che il dizionario contenga solo i termini che trovansi effettivamente nei libri in uso oggigiorno. I termini antichi eccezionalmente possono essere riportati, se c'è qualche vantaggio a richiamarli in uso.

Lo scopo principale del dizionario è quello di poterne estrarre una terminologia da adottarsi in seguito. Ma le discussioni su questa scelta sarebbero attualmente intempestive, prima che il lavoro di raccolta del materiale entro cui si deve scegliere non sia terminato.

Queste le ragioni che esposi nel congresso dei professori italiani di Matematica, tenutosi a Livorno nell'agosto 1901. Ivi si è convenuto di pubblicare un « Dizionario di Matematica », mediante la cooperazione di

Mathesis, società fra gli insegnanti delle scuole secondarie, presiedute dal prof. G. Frattini a Roma,

Periodico di Matematica, diretto dal prof. G. Lazzeri, a Livorno,

Rivista di Matematica, diretta dal prof. G. Peano a Torino.

Aderirono pure:

Il Bollettino di Matematica, diretto dal prof. A. Conti a Bologna,

Il Pitagora, diretto dal prof. G. Fazzari a Palermo.

La prima parte di questo Dizionario si riferisce alla Logica matematica. Un saggio di questa parte fu presentato al congresso medesimo. Completato con aggiunte apportate dai professori Vacca, Vailati e Padoa, qui ne segue un'edizione provvisoria.

I membri e i collaboratori degli enti associati possono pubblicare sul rispettivo giornale le aggiunte, correzioni e osservazioni che crederanno opportune.

Trascorso un tempo sufficiente, si passerà alla stampa definitiva di questa prima parte del Dizionario.

PARTE 1ª — LOGICA MATEMATICA

In questo Dizionario hanno posto i termini generali che incontransi nelle pubblicazioni matematiche. Sono esclusi cioè i termini proprii dell'Aritmetica, della Geometria e delle altre parti della Matematica.

I termini sono accompagnati dalla loro etimologia e da spiegazioni o esempi intorno al loro valore, o ai loro valori, e dalla loro trasformazione nei simboli usati nel « Formulaire de Mathématiques » (*) quando la cosa è possibile. Questi termini non sono però accompagnati da una vera definizione, perchè l'esame di quali si possono definire e quali no, richiederebbe tutta la Logica simbolica.

(*) Abbreviato in Formul. Quì si citerà l'edizione dell'a. 1901, Paris, Carré et Naud.

Addizione logica. Vedi « Somma logica ».

Analisi, ἀνά-λυ-σις = so-lu-zione. Opposto a « sintesi ».

Al testo di Euclide, libro 13, secondo Heiberg t.4 p.364, furono aggiunte da qualche commentatore le definizioni di analisi e sintesi, ma poco chiare. La prima, come sta scritta, enuncia una forma di ragionamento errata. Lo stesso fa Pappo libro 7 p.634.

In Archimede, *Della Sfera* libro 2 prop. 4,. l'analisi del problema consta nel porre il problema in equazione, e nella sua risoluzione. La sintesi ne è una specie di verifica o prova.

Il ragionamento analitico consta d'una serie di sillogismi della forma $b \supset c \,.\, a \supset b \,.\supset.\, a \supset c$.

Invece nel ragionamento sintetico i sillogismi hanno la forma

$a \supset b \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \supset c$.

Appartenère lat. adpertinere, ha assunto il valore di «essere parte» (vedi).

Altre volte significa « è un ». (x *appartiene* alla classe a) = ($x \varepsilon a$).

Arbitrio. « Presi ad arbitrio due numeri a e b » vale quanto « Se a e b sono numeri ». Vedi essere.

Articolo. Termine grammaticale.

Diversamente unito al verbo « essere » (vedi) gli dà i valori ε, $=$, $\supset$.

Assioma = ἀξίωμα da ἄξιος = degno. Vale « proposizione primitiva » indicata nel Formul. con Pp.

Alcuni A. fanno differenza fra assioma e postulato, a seconda del grado di evidenza.

Associativa. Essendo x,y degli individui d'una classe, sia xay un individuo della stessa classe. Il segno a indica un'operazione. Quest'operazione dicesi « associativa » se qualunque siano x,y,z nella classe, si ha: $(xay)az = xa(yaz)$.

Sono associative le operazioni aritmetiche $+$ e $\times$, e le logiche $\cap$ e $\cup$

Il nome « associativo » fu introdotto in questo senso da **Hamilton** Cambridge J. a.1846 t.1 p.50.

Assurdo lat. absurdus che in origine significava « che suona male ».

(la condizione p_x è in x assurda) = (non esistono degli x che soddisfacciano alla condizione p_x) = ($-\exists\, x \ni p_x$).

Generalmente la condizione p_x è l'affermazione simultanea di più condizioni, e allora dire « il sistema è assurdo » vale quanto « le condizioni sono contradditorie ».

Astrazione. Dicesi in logica matematica « definizione per astrazione » la definizione d'una funzione φx, avente la forma:

$\varphi x = \varphi y . = .$ (espressione composta coi segni precedenti),

cioè non si definisce il segno isolato φx, ma solo l'uguaglianza $\varphi x = \varphi y$.

Avere si trasforma in « essere ». Es. « Se si *hanno* due numeri a e b » vale « Siano a e b dei numeri ».

(4 e 6 *hanno* per massimo comune divisore 2) = [$2 = \mathrm{D}(4,6)$].

Campo = classe.

Classe = classis, idea primitiva, indicata col simbolo Cls.

Coesistere. (Le condizioni d'un sistema coesistono) = (il sistema non è assurdo).

Coincidere vale « essere eguale ».

Commutativa. Sia xay una funzione di x e di y. Si dice che l'operazione a è commutativa se $xay = yax$.

Sono commutative le operazioni logiche $\cap$ e $\cup$, e le aritmetiche $+$ e $\times$.

Dicesi poi che due operazioni f e g a eseguirsi su una sola variabile x sono commutabili fra loro quando $f(gx) = g(fx)$.

In analisi sonvi numerose coppie di funzioni commutabili.

Questo termine fu introdotto da Servois, Annales de Math. a.1815 p.50.

Compatibili = coesistenti (vedi).

Comune. (Classe comune alle classi a e b) = $a \cap b$.

Comunque = ad arbitrio (vedi).

Conclusione = Tesi (vedi).

Condizione = proposizione contenente variabili.

Se a è una classe, la proposizione « x è un a » in simboli « $x \varepsilon a$ », è una condizione in x.

Viceversa se p_x è una condizione in x, si può considerare la « classe degli x soddisfacenti alla condizione p_x » indicata col simbolo « $\bar{x} \ni p_x$ », che si legge « x tale che p_x ». Si ha

$$x \ni (x \varepsilon a) = a \qquad x \varepsilon (x \ni p_x) = p_x .$$

Quindi data una classe, risulta determinata una condizione, e viceversa. Sicchè i termini « classe » e « condizione » esprimono la stessa idea sotto due aspetti diversi. Nel Formul. si usa il solo simbolo Cls.

Conseguenza. (La proposizione p è conseguenza della q) = ($q \supset p$).

Contenere. (La classe a è contenuta in b) = (dall'essere a si deduce essere b) = ($a \supset b$).

Contraddittorio, Contrario. In logica scolastica il contraddittorio del giudizio (proposizione) $a \supset b$ è $-(a \supset b)$, e il contrario è $a \supset -b$.

In matematica più proposizioni condizionali diconsi contraddittorie, se il loro prodotto logico è assurdo (vedi).

Conversione. Regola di logica scolastica, per cui
dalla proposizione « qualche *a* è *b* » si passa alla « qualche *b* è *a* »
e dalla « nessun *a* è *b* » si passa alla « nessun *b* è *a* ».

Siccome in logica simbolica queste proposizioni si scrivono $\exists a \frown b$, e $-\exists a \frown b$, là conversione è una forma della regola di logica simbolica, detta « commutatività del prodotto logico ».

La conversione ora considerata dicesi pure « conversione semplice ».

Si converte la proposizione « ogni *a* è *b* » in « qualche *b* è *a* »; e questa operazione dicesi « conversione parziale, o per accidente ». Si noti però che in questo caso la proposizione « ogni *a* è *b* » non significa $a \supset b$, ma bensì « $a \supset b \,.\, \exists a$ ».

Corollario da corona, corolla, corollarium = appendice. Così Boezio *Consol.* 3·10 tradusse il greco *πόρισμα* = conseguenza immediata d'un teorema.

Costante. Alcune volte è un pleonasmo. « Sia *a* una quantità costante » vale quanto « $a \varepsilon Q$ ». Ogni lettera ha un valore costante in una stessa formola, e un valore variabile da formula a formula.

Applicata ad una funzione, la parola « costante » è tradotta con const, simbolo definito nel Formul. §70.

Dare, è un pleonasmo. (Siano dati due numeri *a* e *b*) = (siano *a* e *b* dei numeri).

Deduzione. Se *p* e *q* sono proposizioni, la proposizione « da *p* si deduce *q* » chiamasi deduzione, e si indica con « $p \supset q$ ».

Se *a* e *b* sono classi, $a \supset b$ si suol leggere « ogni *a* è *b* »; e vale quanto « dall'essere *a* si deduce essere *b* ».

La deduzione si esprime nel linguaggio ordinario sotto più forme. Vedasi condizione, necessario, sufficiente, conseguenza, ...

Definizione abbreviato in Def. Nel Formul. è un'eguaglianza il cui primo membro è il segno nuovo che si definisce, ed il secondo un gruppo noto di segni. Es. (Numero primo) = (Numero divisibile solo per sè stesso, e per l'unità).

Alcuna volta si definisce un'espressione contenente lettere variabili; e la definizione è preceduta da un'ipotesi. Es.

(Essendo *a* e *b* delle frazioni) $.\supset.$ $a+b$ = (espressione composta con *a* e *b* e coi segni delle operazioni aritmetiche sui numeri interi).

« Definizione possibile » è un'eguaglianza che, per un possibile ordinamento della scienza, può essere assunta come definizione.

Data una P, si riconosce facilmente se essa sia una definizione possibile. Diventa o no una Def, a seconda della teoria e dell'arbitrio dell'autore,

Il segno $=$ d'una definizione suol leggersi « dicesi, chiamasi, indica, significa, rappresenta ».

Dimostrazione. Una dimostrazione ha in generale per scopo di persuaderci della verità d'una proposizione.

Alcune volte la dimostrazione d'un sistema di proposizioni già chiare, o verificabili coll'esperienza, ha per scopo di analizzarne le mutue relazioni, e di ridurle a un sistema di proposizioni primitive.

Le dimostrazioni sono fatte quasi sempre colla sola logica naturale.

Furono però date delle dimostrazioni in cui si ottiene una proposizione dalle precedenti con una serie di trasformazioni logiche.

Diverso $=$ differente $=$ (distinto) $=$ (non eguale) $= (-\iota)$

Distributiva. Dicesi che l'operazione α è distributiva rispetto alla β se $x\alpha(y\beta z) = (x\alpha y)\beta(x\alpha z)$, e si indica con Distrib(α,β).

Sussistono le proprietà aritmetiche Distrib$(\times, +)$, Distrib$(\Lambda, \times)$, Distrib(lim, $+$), Distrib(lim, $\times$), ecc.

e le logiche Distrib $(\varepsilon,\cap)$, $(\cap,\cap)$, $(\supset,\cap)$, $(\cap,\cup)$, $(\cup,\cap)$, e molte altre.

Il nome fu introdotto da Servois. Vedi *Commutativa*.

E, latino et. In molti casi indica il prodotto $\cap$.

(I numeri multipli di 2 *e* di 3 sono multipli di 6) $=$ $(2\text{N} \cap 3\text{N} \supset 6\text{N})$.

(I multipli di 6 sono multipli di 2 *e* multipli di 3) $=$ $(6\text{N} \supset 2\text{N} \cap 3\text{N})$.

Qualche volta significa $\cup$. Es.

(I multipli di 4 *e* i multipli di 6 sono multipli di 2) $=$ $(4\text{N} \cup 6\text{N} \supset 2\text{N})$.

Eguale. « È eguale » o « eguaglia » si indica col simbolo $=$.

La parola « eguale » quando si presenta sola, è indicata nel Formul. con ι (iniziale di ἴσος). Sicchè $\varepsilon\iota$ vale quanto $=$.

Nel Formul. si ha una sola eguaglianza, detta anche identità o coincidenza. Un'eguaglianza-identità della forma $\varphi x = \varphi y$ da alcuni autori si considera come una specie d'eguaglianza fra x e y, e si indica con nomi speciali.

Eguaglianza è una scrittura della forma $x=y$.

x dicesi il primo membro, y il secondo dell'eguaglianza.

Equazione è la forma latina di « eguaglianza ». Vedi identità.

Equipollenza. Altra forma di eguaglianza, usata da Bellavitis pei vettori. Dopo i lavori di Grassmann e di Hamilton, si indica semplicemente col segno $=$.

Equivalenza. Altra forma di eguaglianza. « Le condizioni p e q sono equivalenti » vale « $p=q$ ».

« Il solido a è equivalente al solido b » vale « Volume di a $=$ volume di b ».

Elemento. Classe contenente un solo individuo.

(La classe a è un elemento) $= [\exists a : x,y\varepsilon a \,.\supset_{x,y} .\, x=y]$.

Esistere. Si indica con $\exists$.

Essere. A seconda dei casi ha i valori ε, $=$, $\supset$, $\exists$.

Es. (7 *è un* numero primo) $=$ (7ε Np)
(13 *è la* somma di due quadrati) $=$ ($13 \varepsilon N^2+N^2$)
(5 e 7 *sono* numeri primi) $=$ ($5,7 \varepsilon$ Np)
(*Tutti* i multipli di 4 *sono* multipli di 2) $=$ ($4N \supset 2N$)
(*Ogni* multiplo di 4 *è* un multiplo di 2) $=$ »
(*L'*uomo è mortale) $=$ (uomo $\supset$ mortale)
(13 *è la* somma di 4 e 9) $=$ ($13=4+9$)
(*Sia a* un numero primo; si ha...) $=$ ($a \varepsilon$ Np $.\supset.$ ...)
(*Essendo* » » ») » » »
(*Sonvi* quadrati somme di due quadrati) $=$ [$\exists N^2 \cap (N^2+N^2)$]

Fissare è pleonasmo.

(Siano fissati due numeri *a* e *b*) $=$ (Essendo *a* e *b* due numeri).

Le funzioni d'una coppia di variabili si indicano spesso scrivendo il segno di funzione fra le due variabili. Es. $a+b$, $a-b$,...

Invece di « funzione » dicesi anche « operazione » o « corrispondenza ».

Generale o **universale** dicesi una proposizione, o giudizio, della forma $a \supset b$, ovvero $a-b=\Lambda$, o sostituendo *b* a $-b$, $ab=\Lambda$.

Giudizio *particolare* è la negazione d'un giudizio universale, cioè della forma $\exists\, a \cap b$.

Una proposizione *A* dicesi qualche volta *più generale* della *B*, e la *B* caso particolare di *A*, se aggiungendo alla ipotesi di *A* una nuova ipotesi, si deduce la *B*.

Per es. se nella prop. $a,b \varepsilon N .\supset. (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
aggiungo all'ipotesi la condizione $b=1$, e semplifico, ho il caso particolare $a \varepsilon N .\supset. (a+1)^2 = a^2+2a+1$.

« In generale » alcuna volta significa « sempre » ed è un pleonasmo.

Altre volte dire che una proposizione « è vera in generale » significa che ha dei casi di eccezione, ossia che non è vera.

Alcuni A. dicendo che una funzione definita in un intervallo ha « in generale » una data proprietà, intendono che abbia sempre questa proprietà, tolto un numero finito di punti. E considerata in un campo piano ha « generalmente » una data proprietà, quando si debbano eccettuare solo delle linee in numero finito. Ma siccome con una linea si può coprire con continuità tutto il campo piano, questo concetto deve essere maggiormente precisato. Ad ogni modo questo valore del termine « in generale » esce dalla logica pura, perché contiene idee di aritmetica o di geometria.

Gruppo, alcune volte significa Classe, in simboli Cls.

(Gruppo di funzioni, o operazioni) $=$ (classe di operazioni, tale che il prodotto funzionale di due individui di essa appartenga alla classe stessa). $a \varepsilon$ Cls $.\supset.$ (Gruppo di operazioni in a) $=$

$$\text{Cls}'(aFa) \cap u \ni (x,y \varepsilon u .\supset_{x,y}. xy \varepsilon u)$$

Sottogruppo. Essendo *a* un gruppo, nel primo o secondo significato, la frase « *b* è un sottogruppo di *a* » significa $b \supset a$,

Identità. « Gli oggetti x ed y sono identici » vale « $x=y$ ».

Una proposizione p_x contenente la variabile, o sistema di variabili, x, è un'identità, o è identicamente vera, qualunque sia x in un campo a » significa « comunque si prenda x nel campo a, si ha p_x » ; in simboli $x \varepsilon a \,.\supset_x .\, p_x$. Es. $x,y \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset.\, x+y=y+x$.

Alcuni A. chiamano identità un'eguaglianza della forma $x=x$.

Altri chiamano identità l'eguaglianza fra due espressioni, vera per tutti i valori delle lettere. Allora $x+y=y+x$ non è un'identità, perchè non è vera se x e y sono vettori sferici.

Equazione è un'eguaglianza contenente una variabile x, che sta per essere accompagnata dal segno $x \ni$. Sicchè un'eguaglianza si chiama equazione o identità, a seconda della sua posizione nell'enunciato, precisamente come un numero si chiama « termine » o « fattore » a seconda della sua posizione in una formola.

Ideografia, in tedesco « Begriffschrift ». Scrittura in cui ogni idea è rappresentata con un segno. Sono ideografie più o meno complete la scrittura geroglifica degli antichi egiziani, come pure la cinese attuale. Ideografie parziali sono costituite dalle cifre dette arabiche, dai simboli della chimica, dai segni algebrici, ecc. L'ideografia completa, o pasigrafia, fu intravvista da Leibniz, col nome di « characteristica », che ne pose le fondamenta in scritti parzialmente da lui pubblicati, e che ora si vanno pubblicando. Vedasi specialmente:

L. Couturat — *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris a. 1901 pag. 604.

L'unione dei simboli di logica cogli algebrici permise di esprimere completamente in simboli molte parti della matematica.

Tutte le idee generali, contenute nel presente Dizionario, sono riduttibili ai simboli ideografici

$=$ Cls ε $\ni$ $\supset$ $\cap$ $\cup$ $-$ $\exists$ ι ℩

leggasi:

è eguale, classe, è, tale, dunque, e, o, non, esiste, eguale, quel.

Indipendente. (Due classi a e b sono indipendenti) $=$ ($\exists a-b \,.\, \exists b-a$).

Due condizioni p_x e q_x contenenti la variabile x sono indipendenti, quando lo sono le classi $x \ni p_x$ e $x \ni q_x$.

Due postulati, o proposizioni primitive, sono indipendenti, se considerando i segni che rappresentano idee primitive come variabili, esse sono in questi segni condizioni indipendenti.

Si prova l'indipendenza d'un sistema di n proposizioni primitive, portando n esempi o interpretazioni dei segni primitivi, che soddisfano a tutte le combinazioni a $n-1$ delle Pp e non alla eccettuata.

Insieme è lo stesso che classe $=$ Cls.

Inverse (legge delle). Vedi negazione.

Ipotesi da ὑπό-θε-σις $=$ Sup-po-sizione.

Essendo p e q condizioni, nella deduzione $p \supset q$, p è l'ipotesi,

Logica matematica è la scienza che tratta delle forme di ragionamento che si incontrano nelle varie teorie matematiche, riducendole a formole simili alle algebriche.

Essa ha comune colla logica d'Aristotele il solo sillogismo. Le classificazioni dei varii modi di sillogismi, quando sono esatte, hanno in matematica poca importanza.

Nelle scienze matematiche si incontrano numerose forme di ragionamento irreduttibili a sillogismi.

I principali teoremi di questa scienza si debbono a Leibniz († 1716), Lambert († 1777), Boole († 1864), McColl, Schröder, ecc. Nella RdM. t.7, p.3 si trova l'elenco di 67 memorie pubblicate su questo soggetto nell'ultimo decennio. Altre sono da aggiungere.

Legge associativa, commutativa, distributiva. Vedansi questi nomi.

Legge delle inverse, vedi negazione.

Lemma = λῆμμα da λαμβάνω = assumo.

In Archimede vale proposizione che si assume senza dimostrazione, cioè proposizione primitiva Pp.

Generalmente vale proposizione che si premette ad un teorema onde facilitarne la dimostrazione.

Membro d'un'eguaglianza (vedi).

Moltiplicazione logica vedi « Prodotto logico ».

Necessario. (La proposizione p è condizione necessaria della q) = ($q \supset p$).

Negazione. Si indica col segno - che si legge « non ».

Si ha: $a \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset . --a = a$

« Trasportare », in Logica matematica, significa applicare la regola:

$$a,b \varepsilon \mathrm{Cls} . a \supset b . \supset . -b \supset -a$$

analoga a una regola algebrica.

Questa regola è anche chiamata da alcuni « legge delle inverse ». Chiamasi « proposizione inversa » di $a \supset b$ la $b \supset a$, e « contraria » della $a \supset b$ la $-a \supset -b$. Però, mentre il passaggio da una proposizione alla sua inversa o alla sua contraria è illegittimo, è solo legittimo l'accoppiamento delle due operazioni, che esprime la regola del trasportare.

Nome. Termine grammaticale.

Nome comune = Cls.

Si possono considerare in analisi come « nomi proprii » i segni 0,1,2,..) e, i, π, ecc. Del resto ogni nome comune, o nome d'una classe, è il nome proprio della classe.

La differenza fra nome e aggettivo è puramente grammaticale.

Si dice « 7 è un intero » come pure « 7 è un numero intero ».

In simboli i nomi non hanno nè numeri nè casi.

Non vedi negazione.

Nulla. La classe nulla, classe non contenente individui, fu indicata con N (Nihil) da Leibniz, con 0 da Boole, con $\wedge$ nel Formul. Il suo uso è limitatissimo. Ivi si trasforma (la classe a è nulla) in (non esistono degli a), in simboli ($-\exists a$).

O quando ha il valore del latino « vel » indica la somma logica $\cup$.

Quando ha il valore del latino « aut » fu chiamato « disgiunzione completa ». « a aut b » vale « $a-b \cup b-a$ ».

Ogni latino omnis. (ogni a è b) = ($a \supset b$).

Parte. La classe a è parte di b significa $a \supset b$.

Altre volte significa « $a \supset b \,.\, a -= b$ ».

Particolare vedi « generale ».

Possibile si esprime con $\exists$ (esistono).

(è possibile determinare, o trovare, un numero quadrato somma di due quadrati) = [$\exists N^2 \cap (N^2 + N^2)$].

Postulato = λαμβανόμενον, è indicato, insieme all'assioma (vedi), con Pp.

Prendere è pleonasmo.

(Siano a e b due numeri, presi ad arbitrio. ma fissi) = (Siano a e b dei numeri).

Preposizione. Termine grammaticale.

Le preposizioni del linguaggio comune nella traduzione in simboli si uniscono col segno di funzione, e qualche volta sono un segno di funzione.

Es. (Somma di 2 *con* 3) = $2+3$
(2 moltiplicato *per* 3) = 2×3
(2 elevato *a* 3) = 2^3
(logaritmo *di* 2) = $\log 2$
(3 metri *al* secondo) = 3m/s
(3 metri *in* 2 secondi) = 3m/(2s)
(3 Lire *al* metro) = 3L/m.

Problema = πρόβλημα da προβάλλω = propongo.

Enunciato d'una condizione (o complesso di condizioni) p_x.

Risolvere il problema è trasformare la classe $x \mathfrak{z} p_x$ in un'altra in cui la lettera x sia scomparsa. Es. $q \cap x \mathfrak{z} (x^2 - 3x + 2 = 0) = \iota 1 \cup \iota 2$.

Prodotto logico di due classi a e $b = a \cap b$, e rappresenta la classe comune agli a e ai b.

La moltiplicazione logica ha le proprietà

$$a \cap a = a \quad a \cap b = b \cap a \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) \text{ ecc.}$$

Pronome. Termine grammaticale.

Questo, quello, ecc. sono spesso rappresentati da $a, b, \ldots x, y \ldots$

Es. (Un numero più un altro numero vale quanto il secondo numero più il primo) = ($a, b \varepsilon N \,.\supset.\, a + b = b + a$).

Tale che si esprime con $\mathfrak{z}$.

Proposizione si abbrevia con P.

Alcune P hanno il carattere di definizioni possibili. In una teoria, cioè in un ordinamento delle P relative a un dato soggetto, si scelgono fra queste le definizioni.

Altre P sono indimostrabili; esse enunciano le proprietà delle idee primitive, e si chiamano « proposizioni primitive ».

Le altre P, a seconda delle circostanze, chiamansi teoremi, corollarii, lemmi.

In Logica matematica si opera solo su proposizioni condizionali, o condizioni (vedi).

Proprietà. Sia a una classe; l'« essere un a » suolsi chiamare una proprietà. Sicchè la differenza fra proprietà e classe è puramente grammaticale.

« a è proprietà caratteristica di b » vale « $a = b$ ».

Qualche. Essendo a e b delle classi, la proposizione particolare affermativa « qualche a è b » vale quanto « esistono degli a e b » in simboli « $\exists a \frown b$ ».

Quello ha alcune volte il valore di ι.

(Essendo a e b due numeri, e b il maggiore, con $b-a$ si intende *quel* numero che aggiunto ad a dà per risultato b) $=$

$[a,b \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b > a \,.\supset.\, b-a = \iota\, \mathrm{N} \frown x \ni (a+x=b)]$

Relazione. Una relazione fra due enti è espressa da una condizione fra i due enti. Se x,y sono gli enti variabili, e $p_{x,y}$ è la condizione, risulta determinata la classe delle coppie $(x;y)$ che soddisfano a questa condizione; essa è indicata con $(x;y) \ni p_{x,y}$.

Quindi ogni relazione può essere rappresentata da una classe di coppie.

Ad es. $(x;y) \ni [x,y \varepsilon \mathrm{q} \,.\, x^2+y^2=1]$, se identifichiamo la coppia $x;y$ di numeri reali col punto avente le stesse coordinate, rappresenta la circonferenza di centro l'origine e di raggio 1.

La condizione $p_{x,y}$ si può pure esprimere con una funzione. Pongasi $fy = x \ni (p_{x,y})$. Allora $p_{x,y}$ diventa $x \varepsilon fy$, cioè « x è un individuo della classe fy.

Scolio $=$ σχόλιον, vale nota, osservazione.

Se. Siano a e b delle proposizioni. « Se a, allora b » vale $a \supset b$.

Sempre. È un pleonasmo per rinforzare la deduzione.

Sintesi da σύν-θε-σις $=$ com-po-sizione. Vedi « Analisi ».

Sillogismo. È la proposizione:

$$a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \supset c.$$

I logici scolastici considerarono più modi di sillogismi, che si trasformano fra loro colla conversione (vedi). Essi hanno poca importanza.

Sistema, qualche volta indica Cls.

Il sistema di due variabili x e y si indica con $(x;y)$ o (x,y).

Sistema di condizioni è l'affermazione simultanea o prodotto logico delle condizioni date. In Logica Matematica il prodotto di più condizioni è una condizione.

Soddisfare. (Gli x tali che *soddisfano* alla condizione p_x) = ($x \ni p_x$).

Somma logica di due classi a e b è la classe formata dagli enti che appartengono ad una almeno delle classi a e b. Si indica con $a \cup b$, e il segno $\cup$ si legge « o » (vedi).

Essa ha le proprietà

$a \cup a = a \quad a \cup b = b \cup a \quad a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c \quad a \cap (b \cup c) = a \cap b \cup a \cap c$ ecc.

Sufficiente. (La proposizione p è condizione sufficiente della q) = ($p \supset q$).

Supposizione. Forma latina di ipotesi.

Tale. (Gli x *tali* che è soddisfatta la condizione p_x) = (Gli x *tali* che p_x) = ($x \ni p_x$).

Teorema = θεώρημα, da θεωρέω = considero, indica una proposizione che si dimostra.

Tesi = θέσις. Nella deduzione $a \supset b$, b è la tesi.

Trasportare. Vedi « negazione ».

Tutto. La classe totale, o tutto, fu indicata in logica simbolica coi segni 1, ∞, V. Esso ha però poca importanza, e fu escluso dal Formulario.

Verbo. Termine grammaticale.

Corrispondono a verbi i simboli ideografici ε, $=$, $\supset$, $\exists$, $>$, $<$.

Verificare = soddisfare (vedi).

Vero. « La proposizione A è vera » vale « A ».

G. Peano

ADDITIONS AU FORMULAIRE a.1901

par

A. Arbicone
T. Boggio
E. Cantoni
F. Castellano
G. Peano, abrégé en (p
G. Vacca » (v

add. indique cette série d'additions: la première série est contenue dans RdM. t.7 p.85-110.

DEUXIÈME SÉRIE

LOGIQUE

§ ⊃ 10·61 Au lieu de *y3* lisez *z3*. (p

§| (p.35) Eisenstein (a.1847, p.71-91) a employé le symbole ϖ pour indiquer la substitution.

Il avait observé qu'on ne pouvait employer à cet effet le symbole $=$. Car si dans une formule on veut substituer au nombre m le nombre $m+1$ on ne peut écrire l'égalité absurde $m=m+1$, mais bien suivant Eisenstein, $m \varpi m+1$, ou suivant le F, $[(m+1)\,|\,m]$. (v

ARITHMÉTIQUE

§ ×

1·8 $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(ab+bc+ca)(a+b+c)$

1·9 $(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)+abcd=$
$(abc+bcd+cda+dab)(a+b+c+d)$

On remarquera que si dans le premier membre de cette P et de la P1·8 au lieu des $+$ on met des $\times$, et au lieu des produits indiqués on fait des sommes, on obtient le second membre, et réciproquement.

8·31 $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)+(a-b)(b-c)(c-a)=0.$

Boggio

§ ↾

6·1 Dem

F. Lindemann, *Ueber den Fermat'schen Satz betreffend die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n+y^n=z^n$.*

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München, a.1901 Heft 2, p.185-202.

Così il vincitore di π vinse pure l'ultimo teorema di FERMAT. (p

3·31 $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2=(a+b)(b+c)(c+a)+4abc$

14·321 $(a+b-2c)(a-b)^2+(b+c-2a)(b-c)^2+(c+a-2b)(c-a)^2=0$

·701 $ab(a^3-b^3)+bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)+$
$(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)=0$

·800 $a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3=3abc(a-b)(b-c)(c-a)$

Boggio

§↑ 14·101 $(a+b)^3=a(a-3b)^2+b(b-3a)^2$

·29 $(a+b)^4=(a^2-6ab+b^2)^2+16ab(a-b)^2$

·72 $(a+b)^5=a(a^2-10ab+5b^2)^2+b(a^2-10ab+b^2)^2$

·83 $(a+b)^6=(a-b)^2(a^2-14ab+b^2)^2+4ab(3a-b)^2(3b-a)^2$

·921 $(a+b)^7=a(a^3-21a^2b+35ab^2-7b^3)^2+b(7a^3-35a^2b+21ab^2-b^3)^2$

·931 $(a+b)^8=(a^4-28a^3b+70a^2b^2-28ab^3+b^4)^2+$
$64ab(a-b)^2(a^2-6ab+b^2)^2$

·97 $(a+b)^9=a(a^4-36a^3b+126a^2b^2-84ab^3+9b^4)^2+$
$b(9a^4-84a^3b+126a^2b^2-36ab^3+b^4)^2$ Castellano

22·21 $m\varepsilon N_1 . a\varepsilon R . ma<1 .\supset. (1+a)^m < /(1-ma)$
[$1+a < /(1-a) .\supset. (1+a)^m < 1-ma$] (p

§Num·121 $a,b\varepsilon$ Cls . $f\varepsilon(bfa)$sim $.\supset.$ Num$a \leq$ Num$b$ (p

Ex. §lim 5·1

§ Σ

3·5 $a\varepsilon N_0 .\supset. \Sigma\{/[(a+r)(a+r+1)] \mid r, 1\cdots m\} = /(a+1)-/(a+m+1)$
[Hp . $r\varepsilon N_1 .\supset. /[(a+r)(a+r+1)]=/(a+r)-/(a+r+1) .\supset.$ P]

Continuation : §Π 4·11

Boggio

4·2 $s_9=(6s^5-20s^4+12s^3-3s^2)/5$
{ Seitz et Gander : *The Analyst*, t.6 p.58 a.1879 }

Arbicone

§Σ 11*n*. Ajoutez :Cardano dans sa *Practica Arithmeticæ*, Mediolani a.1539, fol. D iiii v. a remarqué l'utilité des fractions décimales pour l'extraction des racines carrées et cubiques, ayant observé que

$a,n\varepsilon N_1 .\supset. \sqrt{a} - X^{-n}E\sqrt{(X^{2n}a)} < X^{-n}$
» » $\sqrt[3]{a} - X^{-n}E\sqrt[3]{(X^{3n}a)} < X^{-n}$ (v

20·6 $n,m\varepsilon N_1+1 . x\varepsilon (RF1\cdots n)$sim . $a\varepsilon RF1\cdots n .\supset.$
$(\Sigma ax^m)(\Sigma a)^{m-1} > (\Sigma ax)^m$ (p

§ Π

4·11 $a,m,n\varepsilon N_1 .\supset.$
$m\Sigma[/\Pi(a+r+0\cdots m) \mid r, 1\cdots n] = /\Pi(a+1\cdots m) - /\Pi(a+n+1\cdots m)$

[Hp . $m=1$. §Σ P3·5 .Ɔ. Ths (1)

Hp . $m\Sigma\{/\Pi(a+r+0\cdots m)\,|r, 1\cdots n\} = /\Pi(a+1\cdots m) -/\Pi(a+n+1\cdots m)$.Ɔ.
$(m+1)\Sigma\{/\Pi[a+r+0\cdots(m+1)]\,|r, 1\cdots n\} = \Sigma\{[/\Pi(a+r+0\cdots m) -$
$/\Pi[a+r+1\cdots(m+1)]\,|r, 1\cdots n\} = \{/\Pi(a+1\cdots m) -/\Pi(a+n+1\cdots m)\}/m -$
$\{/\Pi[a+2\cdots(m+1)] -/\Pi[a+n+2\cdots(m+1)]\}/m = /\Pi[a+1\cdots(m+1)] -$
$/\Pi[a+n+1\cdots(m+1)]$ (2)

(1) . (2) . Induct .Ɔ. P] Boggio

§ !

5·3 Dem [$r\varepsilon N_1$.Ɔ. $r/(r+1)! + (r+1)/(r+2)! = /r! -/(r+2)!$.Ɔ. P]

·4 $\Sigma\{(2r-1)/(r!\,2^r)\,|r,1\cdots n\} = 1-/(n!\,2^n)$

[$r\varepsilon N_1$.Ɔ. $(2r-1)/(r!\,2^r) = /[(r-1)!\,2^{r-1}] -/(r!\,2^r)$.Ɔ. P]

6·21 $C(m,n) = \Sigma[(-1)^r C(m+1,n-r)\,|r, 0\cdots n]$

·22 $k\varepsilon N_0$.Ɔ. $C(m,n) = \Sigma\{C(m-k,n-r)\times C(k,r)\,|r, 0\cdots k\}$

·7 $\Sigma\{(-1)^r(2m+1-2r)C(2m+1,r)\,|r, 0\cdots m\} = 0$

·8 $m\Sigma\{[(-1)^r/(r+1)]C(m-r-2,r)2^{m-2r-2}\,|r, 0\cdots E[(m-1)/2]\}$
$= 2^m - 2$

Boggio

6·7 $m\varepsilon\, 6N_0$.Ɔ. $\Sigma[C(m, r)\,|r, (0\cdots m)\frown 3N_0] = (2^m+2)/3$

$m\varepsilon\, 6N_0+1 \cup 6N_0+5$.Ɔ. » $= (2^m+1)/3$

$m\varepsilon\, 6N_0+2 \cup 6N_0+4$.Ɔ. » $= (2^m-1)/3$

$m\varepsilon\, 6N_0+3$.Ɔ. » $= (2^m-2)/3$ (p

7·11 $(a+b)^{2n+1} = a[\Sigma(-1)^r\, C(2n+1, 2r)\, a^{n-r}b^r\,|r, 0\cdots n]^2 +$
$b[\Sigma\,(-1)^r\, C(2n+1, 2r)\, a^r b^{n-r}\,|r, 0\cdots n]^2$

·12 $(a+b)^{2n} = [\Sigma(-1)^r\, C(2n,2r)\, a^{n-r-1}b^r\,|r, 0\cdots(n-1)]^2 +$
$ab[\Sigma(-1)^r\, C(2n,2r+1)a^{n-r}b^r\,|r, 0\cdots n]^2$

Castellano

§E 1·51 $x,y\varepsilon R$.Ɔ. $E(x\times y) \geq Ex\times Ey$
$< (Ex+1)(Ey+1)$

·52 $a,b\varepsilon 1+R$.Ɔ. $E(b/a) \leq E(Eb/Ea)$ [P·51 .Ɔ. P]

2·01 $m,n\varepsilon N_1$.Ɔ. $m = \Sigma[E(m+r)/n\,|r, 0\cdots(n-1)]$

[$(m/n, n)\,|\,(x, a)$ P2·0 .Ɔ. P] (p

§ Chf

$a\varepsilon\, 11N_0$.=. $\Sigma[\text{Chf}\, X^{-2r}a\,|r, N_0] - \Sigma[\text{Chf}\, X^{-2r-1}a\,|r, N_0]\ \varepsilon\ 11n$

$a\varepsilon\, 4N_0$.=. $\text{Chf}a + 2\text{Chf}\, X^{-1}a\ \varepsilon\ 4N_0$

$a\varepsilon\, 8N_0$.=. $\text{Chf}a + 2\text{Chf}\, X^{-1} + 4\text{Chf}\, X^{-2}a\ \varepsilon\ 8N_0$

$a,b\varepsilon\, N_1$.Ɔ. $\text{rest}(a,b) = \text{rest}\{\Sigma[\text{Chf}\, X^{-r}a \times \text{rest}(X^r, b)\,|r, N_0], b\}$(p

§ dt 1·95 $x\varepsilon R$. $D(\text{dt}x, X)=1$. $p\varepsilon N_1$.Ɔ. $\text{Cfr}(X^p x) = \text{Chf}(X^{p+\text{dt}x}x)$

§Np 6·5 $x\varepsilon\, 0\cdots 22$.Ɔ. $17 + 6\,E(x^2/4)\ \varepsilon$ Np

{ Fontebasso, Supplemento al PdM. a.1901 p.130 } (p

§ mp 2·8 $x \varepsilon \mathrm{R} . \mathrm{dt} x \ \varepsilon\ (2 \uparrow \mathrm{N}_0) \times (5 \uparrow \mathrm{N}_0) . n = \max[\mathrm{mp}(2, \mathrm{dt} x), \mathrm{mp}(5, \mathrm{dt} x)]$
$. \supset . x = \mathrm{E} x + \Sigma[\mathrm{Chf}\, x \mathrm{X}^r \,|r, 1 \cdots n]\}$ (p

§Q ✱ 71·1 $a \varepsilon\, \mathrm{qf}(1 \cdots m \,!\, 1 \cdots m \,!\, 1 \cdots m) : x,y \varepsilon\, \mathrm{qF} 1 \cdots m . \supset_{x,y} .$
$\Sigma x^2 \times \Sigma y^2 = \Sigma\{[\Sigma[a_{i,r,s}\, x_r y_s \,|(r,s), 1 \cdots m ! 1 \cdots m]]^2 \,|i, 1 \cdots m\} : \supset .$
$m \varepsilon\, \iota 1 \cup \iota 2 \cup \iota 4 \cup \iota 8$
} HURWITZ a.1898 GöttingenN. Cfr. IdM. a.1900 p.21. } (v

FONCTIONS ANALYTIQUES

§ lim

8·64 $a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset . \lim[\{[b/(2a+x)]|x\}^r 0] \,|r = \sqrt{(a^2+b)} - a$

·91 $a \varepsilon \mathrm{Q} . n \varepsilon \mathrm{N}_1 + 1 . \supset . \lim\{[{}^n\sqrt{(a-x)}|x]^r 0\}|r = \imath \mathrm{Q} \frown x \ni (x^n + x - a = 0)$
·92 $\lim\{[{}^n\sqrt{(ax)}|x]^r 1\} \,|r = a \uparrow /(n-1)$
14·4 Dem [§Σ 3·5 .⊃. P]
16·3 Dem [P·2 . x=/2 .⊃. P]
21·6 Dem [§Π 4·11 .⊃. P] Boggio

§lim 22·1. Substituez à l'indication de Stern la suivante:
{LAGRANGE a.1798; Œuvres t.7 p.297} (v
22·11 $m \varepsilon\, \mathrm{N}_1 \mathrm{f} \mathrm{N}_0 . a \varepsilon (\mathrm{N}_1 \mathrm{f} \mathrm{N}_0)\mathrm{cres} : r \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset_r . m_r \leq a_r : \supset . m_1/a_1 + m_2/a_1 a_2 + m_3/a_1 a_2 a_3 + \ldots\ \varepsilon\ \mathrm{Q} - \mathrm{R}$ (v
{LAGRANGE a.1798; Œuvres t.7 p. 296} (v

23·6 $a \varepsilon\, n . \supset . \lim\{\Sigma[\mathrm{C}(n-1-r,r) \,|r, 0 \cdots n]/$
$\Sigma[\mathrm{C}(n+a-r,r) \,|r, 0 \cdots n]\} \,|n = [(\sqrt{5} - 1)/2]^{a+1}$
Boggio

§ S

5·1 Dem [$\mathrm{S}(x^m \,|x, \Theta) = \lim\{\Sigma[(a^r - a^{r+1})(a^r)^m \,|r, \mathrm{N}_0] \,|a, \theta, 1\}$
$= \lim\{\Sigma[(1-a)(a^{(m+1)r} \,|r, \mathrm{N}_0] \,|a, \theta, 1\}$
$= \lim[(1-a)/(1-a^{m+1}) \,|a, \theta, 1] = /(m+1)$]
Cette dem. est tirée de:
Arzelà, Lezioni di Calcolo infinitesimale; Firenze, Successori Le-Monnier; a.1901.
5·11 $a \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \mathrm{S}(x^m \,|x, \Theta a) = a^{m+1}/(m+1)$
[Hp . P2·5 .⊃. $\mathrm{S}(x^m \,|x, \Theta a) = a\, \mathrm{S}[(az)^m|z, \Theta]$
$= a^{m+1}\, \mathrm{S}(z^m|z, \Theta) = a^{m+1}/(m+1)$]
Boggio

§log 5·1

Note. — Gregorius a S. Vincentio dans son *Opus Geometricum* Antverpiae a.1647 p.594 avait vu la propriété caractéristique de l'aire de l'hyperbole [S(/,1 ⌐ a)], qui suit :

$$a, m \varepsilon \mathrm{Q} \;.\supset.\; \mathrm{S}(/, 1 ⌐ a^{m}) = m\mathrm{S}(/, 1 ⌐ a).$$

Alfonso de Sarasa dans l'opuscule : Solutio problematis a. R. P. Marino Mersennio minimo propositi, Antverpiae a.1649 p.7, a reconnu explicitement que les aires de l'hyperbole correspondent aux logarithmes. (v

§C·6 $\mathrm{e}^{C} = \Pi[(\mathrm{e}^{/n})/(1+/n) \,|n, \mathrm{N}_1]$ (v

§Fc add. ·33 $\mathrm{Fc}(a, 1\cdots n) =$
$/a_1 + \Sigma\{(-1)^r /\mathrm{dtFc}(a, 1\cdots r)\times\mathrm{dtFc}[a, 1\cdots(r+1)] \,|r, 1\cdots(n-1)\}$

·34 $(-1)^n\mathrm{Fc}(a, 1\cdots n) < (-1)^n\mathrm{Fc}(a, \mathrm{N}_1) < (-1)^n\mathrm{Fc}[a, 1\cdots(n+1)]$

·41 $(-1)^{n+1}\{\mathrm{Fc}(a, \mathrm{N}_1) - \mathrm{Fc}[a, 1\cdots(n+1)]\} \;\varepsilon\; \theta(-1)^n[\mathrm{Fc}(a, \mathrm{N}_1)$
$- \mathrm{Fc}(a, 1\cdots n)]$

·42 $b, c\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, \mathrm{mod}\,[\mathrm{Fc}(a, \mathrm{N}_1) - b/c] < \mathrm{mod}\,[\mathrm{Fc}(a, \mathrm{N}_1) - \mathrm{Fc}(a, 1\cdots n)]$
$.\supset.\; b > \mathrm{ntFc}(a, 1\cdots n) \,.\, c > \mathrm{dtFc}(a, 1\cdots n)$ {EULER a.1748 §382}

·51 $m\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, m < n \;.\supset.\; \mathrm{Fc}(a, 1\cdots n) - \mathrm{Fc}(a, 1\cdots m) =$
$(-1)^m\mathrm{dtFc}[a_{m+r+1} \,|r, 1\cdots(nm-1)]/[\mathrm{dtFc}(a, 1\cdots m)\times\mathrm{dtFc}(a, 1\cdots n)]$

·71 $a, b, c\varepsilon\mathrm{n} \,.\, \mathrm{D}(a, b) = 1 \,.\, \mathrm{mod}a < \mathrm{mod}b : n\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, d\varepsilon\, \mathrm{N}_1\mathrm{F}1\cdots n \,.$
$\mathrm{mod}(a/b) = \mathrm{Fc}(d, 1\cdots n) \;.\supset:\; u = (-1)^{n-1}\times\mathrm{sgn}a\times c\,\mathrm{dtFc}[d, 1\cdots$
$(n-1)] \,.\, v = (-1)^n\times\mathrm{sgn}b\times c\times\mathrm{ntFc}[d, 1\cdots(n-1)] \;.\supset.\; u, v\varepsilon\mathrm{n} \,.$
$au + bv = c$ {LAGRANGE, BerlinM. a. 1767 p. 175}

Cantoni

$(\mathrm{e}-1)/(\mathrm{e}+1) = \mathrm{Fc}(2, 6, 10, 14, 18, \ldots) = \mathrm{Fc}[(4x-2) \,|x, \mathrm{N}_1]$
$2/(\mathrm{e}^2-1) = \mathrm{Fc}(3, 5, 7, \ldots) = \mathrm{Fc}[(2x+1) \,|x, \mathrm{N}_1]$
$(\sqrt{\mathrm{e}} - 1)/2 = \mathrm{Fc}(3, 12, 20, 28, 54, \ldots)$
$\sqrt{\mathrm{e}} - 1 = \mathrm{Fc}(1, 1, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 13, \ldots)$
$(\sqrt[3]{\mathrm{e}} - 1)/2 = \mathrm{Fc}(5, 18, 30, 42, 54, \ldots)$
{ EULER a.1737 PetrC. t.9 (publ. en 1744) p.121 }

$n\varepsilon\mathrm{N}_1 \;.\supset.$
$(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1)/(\sqrt[n]{\mathrm{e}}+1) = \mathrm{Fc}(2n, 6n, 10n, \ldots) = \mathrm{Fc}(4x-2)n \,|x, \mathrm{N}_1]$
$2/(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1) - 2n + 1 = \mathrm{Fc}(6n, 10n, \ldots) = \mathrm{Fc}[(4x+2)n \,|x, \mathrm{N}_1]$
{ EULER a.1737 PetrC. t.9 (publ. en 1744 p.132) } (v

§prob (add.) ·4 $n\varepsilon N_1$.⊃.
{prob[(1⋯nF1⋯n)rcp ∩ f∋(xε1⋯m .$⊃_x$. fx−=x), (1⋯nF1⋯n)rcp]}
$= \Sigma[\{(-1)^n/n!\ |n, 0\cdots n\}]$

·5 lim{prob[» »]} |n = /e

Ayant *n* objets 1⋯*n*, cette formule donne la probabilité que l'on a, en tirant les *m* objets au hasard, de n'en rencontrer aucun dont le numéro et le rang de tirage coïncident.

À la limite, lorsque *n* tend vers l'infini cette probabilité = /e.

M. Andrade (JP. a.1894 cah.64 p.224) donne une formule analogue plus compliquée, qui donne e/n, lorsque $n\varepsilon N_1$. (v

NOMBRES COMPLEXES

$\S q_n$

24·7 a,bεQ .⊃. lim{[(x+y)/2, 2xy/(x+y)] |(x,y)$\}^n$(a,b) = [√(ab), √(ab)]
{Gregory *App. ad veram circ. quadr.* a.1668 p.7}

Cette P permet de calculer rapidement les racines carrés des nombres, car le premier membre converge rapidement. (v

$\S q_n$ 25·1. Voir L. De Sanctis, *Sulla convergenza di alcune serie*, Giornale di Matematiche, a.1901. (p

§ Dtrm

·51 Hp·1 . u,u′ε Cls′1⋯m . u−=u′ . ∃u . Numu = Numu′ .⊃.
Σ[(−1)↑(Σu+Σv) ×Dtrm(a, u‘v)×Dtrm(a, (1⋯m)−u′ ‘ (1⋯m)−v) |v, (Cls,1⋯m) ∩ v∋(Numv = Numu)] =0

✱ 2·11 $m\varepsilon N_1$. a,b,c,dε qF(1⋯m‘1⋯m) : r,sε1⋯m .$⊃_{r,s}$. c(r,s) = Σ[a(r,t)b(s,t) |t, 1⋯m] . d(r,s) = Σ[a(t,r)b(t,s) |t, 1⋯m]
:⊃. nε 1⋯m . uε Cls′1⋯m . Numu =n .
$⊃_n$. Σ[Dtrm(c,u‘u) |u,(Cls′1⋯m) ∩ u∋(Numu=n)] =
Σ[Dtrm(d,u‘u) |u,(Cls′1⋯m) ∩ u∋(Numu=n)]

✱ 2′·1 $m\varepsilon 2N_1+1$. aε qF(1⋯m‘1⋯m) : r,sε1⋯m .$⊃_{r,s}$. a(r,s) = −a(s,r) :⊃. Dtrma =0

·2 $m\varepsilon 2N_1$. aε qF(1⋯m ‘ 1⋯m) . bε qF(1⋯m/2 ‘ 1⋯m/2) : r,sε 1⋯m .$⊃_{r,s}$. a(r,s) = −a(s,r) = a(m+1−s,m+1−r) : h,lε 1⋯m/2 .$⊃_{h,l}$. b(h,l) = a(h, m/2+l) + a(m−h+1, m/2+l) :⊃.
$(\text{Dtrm}b)^2$ = Dtrma { Günther Determ. }

·3 $m\varepsilon 2N_1$. aε qF(1⋯m ‘ 1⋯m) : r,sε 1⋯m .$⊃_{r,s}$. a(r,s) = −a(s,r) :⊃. Dtrma = {Σ[$(-1)^s$ a(1,s)√[Dtrm (a,2⋯m−ιs ; 2⋯m−ιs)] |s,2⋯m]$\}^2$

L'expression qui élevée au carré donne la valeur du déterminant hémisymétrique d'ordre pair, est dite le « pfaffien des éléments du déterminant ». JACOBI (JfM. t.2) a indiqué le pfaffien par la notation (1,2,.....,*m*).

✱ 3·4 $m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, a \varepsilon \mathrm{qF}(1\cdots m \,\text{ʻ}\, 1\cdots m) \,.\, b \varepsilon \mathrm{qF}(1\cdots n \,\text{ʻ}\, 1\cdots n) \,.$
$c \varepsilon \mathrm{qF}(1\cdots mn \,\text{ʻ}\, 1\cdots mn) : r,s \varepsilon 1\cdots m \,.\, h,l \varepsilon 1\cdots n \,.\supset_{r,s,h,l}.$
$c[n(r-1)+h,\ n(s-1)+l] = a(r,s) \times b(h,l) :\supset.$
$\mathrm{Dtrm}c = (\mathrm{Dtrm}a)^n \times (\mathrm{Dtrm}b)^m$ { KRONECKER JfM. t.72 }

✱ 5. $m,n,p \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.$
·1 $\mathrm{Dtrm}[\mathrm{C}(n+r+s,r) \,|(r,s),\ 0\cdots m \,\text{ʻ}\, 0\cdots m] = 1$
·2 $\mathrm{Dtrm}[\mathrm{C}(n+m+r+s,n) \,|(r,s),\ 0\cdots m \,\text{ʻ}\, 0\cdots m] \ \varepsilon\ \iota 1 \cup \iota{-1}$
·3 $n \geqq p+m \,.\supset.\ \mathrm{Dtrm}\,[\mathrm{C}(n+r,\ p+s) \,|(r,s),\ 0\cdots m \,\text{ʻ}\, 0\cdots m\,]$
$= \Pi[\mathrm{C}(n+m-r+1)|r,\ 1\cdots p] \,/\, \Pi[\mathrm{C}(m+r,m+1)\ |r,\ 1\cdots p]$
{ ZEIPEL, Om Determinanter... Lunds Univ. Ars-Skrift, a.1865 }
·4 $m \varepsilon \mathrm{N}_1+1 \,.\, a \varepsilon \mathrm{N}_1\mathrm{F}1\cdots m \,.\supset.\ \mathrm{Dtrm}\,[\mathrm{C}(a_r,s)|(r,s),$
$1\cdots m \,\text{ʻ}\, 0\cdots(m-1)] = (-1)^{m(m-1)/2}\,\Pi\{\Pi\,[(a_r-a_s)|s,\ 1\cdots(r-1)]|r,$
$2\cdots m\} \,/\, \Pi[r^{m-r}|r,\ 2\cdots(m-1)]$
{ STERN, JfM. t.66 a.1865 }

Cpl = complément

✱ 8·1 Hp1·1 $.\ m=1 \,.\supset.\ \mathrm{Cpl}a = 1$
Hp1·1 $.\ m \varepsilon \mathrm{N}_1+1 \,.\, r,s \varepsilon 1\cdots m \,.\supset.$
$\mathrm{Cpl}(a,r,s) = (-1)^{r+s}\mathrm{Dtrm}[a,\ (1\cdots m)-\iota r \,\text{ʻ}\, (1\cdots m)-\iota s]$ Df
Cpl(*a*,*r*,*s*) est dit complément algébrique de l'élément (*r*,*s*) du déterminant *a*.
·2 Hp1·1 $: r \varepsilon 1\cdots m \,.\supset.\ \mathrm{Dtrm}a = \Sigma[a(r,s)\mathrm{Cpl}(a,r,s)\ |s, 1\cdots m]$
·3 Hp1·1 $: h,l \varepsilon 1\cdots m \,.\, h -= l \,.\supset.\ \Sigma[a(h,s)\ \mathrm{Cpl}(a,l,s)\ |s,\ 1\cdots m] = 0$
·4 Hp1·1 $.\ k \varepsilon \mathrm{q} \,.\, h,l \varepsilon 1\cdots m \,.\, h -= l : r \varepsilon 1\cdots m \,.\supset_r.$
$\mathrm{Cpl}(a,r,h) = k\mathrm{Cpl}(a,r,l) :\supset.\ \mathrm{Dtrm}a = 0$
·5 Hp1·1 $.\ \mathrm{Dtrm}a = 0 : h,l \varepsilon 1\cdots m \,.\supset_{h,l}.\ \mathrm{Cpl}(a,h,l) -= 0 :\supset.$
$\exists \mathrm{q} \frown k \ni [r \varepsilon 1\cdots m \,.\supset_r.\ \mathrm{Cpl}(a,r,h) = k\mathrm{Cpl}(a,r,l)]$
·6 . $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, a,b \varepsilon \mathrm{qF}(1\cdots m \,\text{ʻ}\, 1\cdots m) \,.\, x \varepsilon \mathrm{q} : r,s \varepsilon 1\cdots m \,.\supset_{r,s}.$
$b(r,s) = a(r,s)+x :\supset.$
$\mathrm{Dtrm}b = \mathrm{Dtrm}a + x\Sigma\{\Sigma[\mathrm{Cpl}(a,r,s)\ |r,\ 1\cdots m]|s,\ 1\cdots m\}$

✱ 9·1 Hp1·1 $.\ \mathrm{Dtrm}a = 0 \,.\, u,v \varepsilon \mathrm{Cls}'1\cdots m \,.\, \mathrm{Num}u = \mathrm{Num}v \geqq 2$
$.\supset.\ \mathrm{Dtrm}(\mathrm{Cpl}a,u\,\text{ʻ}\,v) = 0$
·2 Hp1·1 $.\ u,v \varepsilon \mathrm{Cls}'1\cdots m \,.\, \exists u \,.\, \mathrm{Num}u = \mathrm{Num}v \,.\supset.$
$\mathrm{Dtrm}(\mathrm{Cpl}a,\ u\,\text{ʻ}\,v) =$
$(-1)\Uparrow(\Sigma u+\Sigma v) \times (\mathrm{Dtrm}a)\Uparrow(\mathrm{Num}u-1) \times (\mathrm{Dtrm}[a,(1\cdots m)-u\,\text{ʻ}\,(1\cdots m)-v]$

·3 $\mathrm{Hp}1{\cdot}1 : r,s\varepsilon\, 1\cdots m . \supset . \mathrm{Clp}(\mathrm{Cpl}a, r,s) = a(r,s)\times(\mathrm{Dtrm}a)\curlywedge(m-2)$

·4 $\mathrm{Hp}1{\cdot}1 . \supset .$
$\mathrm{Dtrm}\{\mathrm{Cpl}[\mathrm{Cpl}(a,r,s) \mid (r,s)], 1\cdots m ! 1\cdots m\} = (\mathrm{Dtrm}a)\curlywedge(m-1)^2$

·5 $\mathrm{Hp}1{\cdot}1 . r,s\varepsilon 1\cdots m . \supset . \mathrm{Dtrm}a = a(r,s)\mathrm{Cpl}(a,r,s) -$
$(-1)^{r+s}\Sigma\{\Sigma[(-1)^{p+l}a(r,l)a(p,s)\, \mathrm{Dtrm}(a, 1\cdots m - \iota p - \iota r ! 1\cdots m - \iota l - \iota s)$
$\mid l, 1\cdots m - \iota s] \mid p, 1\cdots m - \iota r\}$

·6 $m\varepsilon \mathrm{N}_1 . a,b,c,d\varepsilon\, \mathrm{qF}(1\cdots m ! 1\cdots m) : r,s\varepsilon\, 1\cdots m . \supset_{r,s} . c(r,s) =$
$\Sigma[a(r,t)b(s,t) \mid t, 1\cdots m] . d(r,s) =$
$\Sigma[\mathrm{Cpl}(a,r,t)\, \mathrm{Cpl}(b,s,t) \mid t, 1\cdots m : \supset_{r,s} . d(r,s) = \mathrm{Cpl}(c,r,s)$

·7 $m\varepsilon \mathrm{N}_1 . a\varepsilon\, \mathrm{qF}(1\cdots m ; 1\cdots m) : r,s\varepsilon\, 1\cdots m . \supset_{r,s} . a(r,s) = a(s,r)$
$: \supset_{r,s} . \mathrm{Cpl}(a,r,s) = \mathrm{Cpl}(a,s,r)$

·8 $m\varepsilon\, \mathrm{N}_1 . a,b,c,d\varepsilon\, \mathrm{qF}(1\cdots m ! 1\cdots m) . h,k\varepsilon\, \mathrm{q} : r,s\varepsilon\, 1\cdots m . \supset_{r,s} .$
$c(r,s) = ha(r,s)+kb(r,s) . d(r,s) = k\mathrm{Cpl}(a,r,s)+h\mathrm{Cpl}(b,r,s) : \supset .$
$\mathrm{Dtrm}c = \mathrm{Dtrm}a \times \mathrm{Dtrm}b \times \mathrm{Dtrm}d$

{ SIACCI Annali di Mat. t.5 p.296 }
Cantoni

§Subst 5·05 $h\varepsilon\mathrm{q} . \supset . \mathrm{Dtrm}(a+h) =$
$\Sigma\{h^t\, \Sigma[\mathrm{Dtrm}(a, u ! u) \mid u, (\mathrm{Cls}'1\cdots n)\frown u\ni(\mathrm{Num}u = n-t)] \mid t, 0\cdots n\}$
Cantoni

§ Subst 16·2. Voir F. Giudice, *Sulla trasformazione degli integrali,* Le Matematiche pure ed applicate, a.1901. (p

§ π

1·86 $\pi\ \varepsilon\ 4 - 2\surd 2 + 2\surd 3/3 + \surd 6/3 - 2\theta\, \mathrm{X}^{-3}$
{ George PEIRCE, *A curious approximate construction for* π, AmericanB. a.1901 p.426 } (p

3·31 $4/\pi = \Sigma\{[\mathrm{C}(/2, n)]^2 \mid n, \mathrm{N}_0\} = 1+/4+/(2\times4)^2+\ldots$
{ FORSYTH Mm. a.1883 t.12 p.142 } (v

10·6 $a\varepsilon\mathrm{Q} . m\varepsilon\mathrm{N}_1 . \supset . \mathrm{S}[/(a^2+x^2)^{m+1} \mid x, \mathrm{Q}] =$
$\Pi\{(2r-1)/(2r) \mid r, 1\cdots m\}\pi/(2a^{2m+1})$
Boggio

§ sin

§sin 14·3. Cette P est commode pour le calcul numérique de $\mathrm{S}\{/\surd[(acx)^2 + ((bsx)^2] \mid x, \theta\pi/2\}$, ainsi qu'il résulte de la 14·31 qui suit, a été donnée par Lagrange sous une autre forme.(TurinM. a.1784 t.2; Œuvres t.2 p.272). (v

14·31 $S\{/\sqrt{[(acx)^2+(bsx)^2]}\ |x,\ \Theta\pi/2\} =$
$\pi\sqrt{2}$ / mod $\lim\{[(x+y)/2,\ \sqrt{(xy)}]\ |(x,y)\}^n(a,b)\ |n$ (v

9·12 $x\varepsilon$ q-n .⊃. $\pi^2/[s(\pi x)]^2 = \Sigma[/(x+n)^2\ |n,$ n]
·7 $a,b,m,n\varepsilon$q .⊃. $\mathrm{mod}(me^{ia}+ne^{ib}) = m^2+n^2+2mn\cos(a-b)$
11·21 $x\varepsilon$ q- nπ .⊃. D(/tng, q- nπ/2, x) = $-/(\sin x)^2$
·7 $x\varepsilon$ q- nπ/2 .⊃. D(log sin, q-nπ/2, x) = /tng$x$
12·1 $a\varepsilon$Q .⊃. S(sin$x$ |x, Θa) = 1—cos a
[Hp . §S P4·1 .⊃. S(sin$x$ |x, Θa) = lim{(a/n)Σ[sin(ra/n) |r, 1···n] |n} (1)
P6·3 .⊃. Σ[sin(ra/n) |r, 1···n] = sin(a/2) sin[(n+1)a/(2n)] /sin[a/(2n)] (2)
(1) . (2) .⊃. S(sin$x$ |x, Θa) = sin(a/2) lim{(a/n)sin[(n+1)a/(2n)] /sin[a/(2n)] |n}
= 2sin(a/2) lim{sin[(a/2)(1+/n)] (a/2n)/sin[a/(2n)] |n}
= 2[sin(a/2)]^2 = 1—cos a]
16·4 S{(tng^{-1}x)/(1+x) |x, Θ} = (π/8)log2

Boggio

VECTEURS

§vct *note*, p.192. Voir :
F. Schur, *Ueber die Grundlagen der Geometrie.* MA. t.55 a.1901 p.265.
(p

✱ 3·36 $(u+v)+w = (v+w)+u = (w+u)+v = u+v+w$
Si $u^2=v^2=w^2$ cette P exprime que: Dans tout trièdre les trois plans menés par les arêtes et les bissectrices des faces opposées ont une droite commune.

·5 $(u-w)+v = (v-w)+u = (u+v)-w = u+v-w$
Si $u^2=v^2=w^2$, cette P dit que: Dans tout trièdre les plans menés par les arêtes et les bissectrices extérieures de deux des faces opposées à ces arêtes et la bissectrice intérieure de la troisième face ont une droite commune.

8·601 $(a-c)\times(b-c) = 0$.=. $(a-c)^2 = (a-c)\times(a-b)$
·64 $2(c-b)\times[a-(b+c)/2] = (a-b)^2 - (a-c)^2$

Boggio

cmp|| cmp⊥

✱ 16·02 Hp P16 .⊃.
(cmp||u)v = 0 .=. $u\times v$ = 0 .∪. v=0
(cmp⊥u)v = 0 .=. $v\varepsilon$ qu .∪. v=0

23·3 u,v,Du,D$v\varepsilon$ vctFq .⊃. D($u\times v$) = $u\times$Dv + $v\times$Du
·4 u,D$u\varepsilon$ vctFq . mod$u$ = 1 .⊃. $u\times$Du = 0
[$u\times u$=1 . P·3 .⊃. P]

Boggio

§vct 34·9 $u,v,w \varepsilon$ vct . $u^2 = v^2 = w^2 = 1$. $\mathrm{ang}(u;v) = a$. $\mathrm{ang}(v;w) = b$.
$\mathrm{ang}(v,u) = c$. $\mathrm{ang}(w;u,v) = a'$. $\mathrm{ang}(u;v,u) = b$. $\mathrm{ang}(v;u,v = c'$.$\supset$.
$\sin c \sin a + \cos c \cos a \cos b =$
$\sin c' \sin a' - \cos c' \cos a' \cos b$ (v

{ CAGNOLI Antonio, *Trigonometria*, 2ª ediz., Bologna a.1804 p.332 } (v

✱ 53·21 $\mathrm{Arc}[(o + x e^{ix} a) \mid x, \Theta x] = \mathrm{S}[\sqrt{(1+x^2)} \mid x, \Theta x]$

Arc de la « spirale d'Archimède ». Voir la parabole.

·5 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 + 1$.$\supset$. $\mathrm{Arc}[(o + m e^{it} a + e^{mit} a) \mid t, 2\Theta\pi] = 8m$

[Hp . $t \varepsilon q$.$\supset$. $\mathrm{modD}[(o + m e^{it} a + e^{mit} a) \mid t, q, t] = m\, \mathrm{mod}(e^{it} + e^{mit}) =$
$2m \sin[(m-1)t/2]$ (1)

(1) . P53·1 .$\supset$. $\mathrm{Arc}[(o + m e^{it} a + e^{mit} a) \mid t, 2\Theta\pi] =$
$2m(m-1)\, \mathrm{S}\{\sin[(m-1)t/2] \mid t, 2\Theta\pi/(m-1)\} = 8m$]

Le point considéré décrit la « roulette » engendrée par un point d'une circonférence de rayon 1 qui roule, sans glisser, à l'extérieur d'une autre circonférence fixe de rayon $m-1$.

Pour $m=2$ on a la « cardioïde propre » ou « Limaçon de Pascal ».

·6 $t \varepsilon 2\Theta\pi$.$\supset$. $\mathrm{Arc}[(o + ta + e^{it} ia) \mid t, \Theta t] = 8 [\sin(t/4)]^2$

La courbe considérée est dite « cycloïde propre ». Boggio

§ ᵽ

✱ 61·31 Hp P61 . $u‘k \supset \delta u‘k$. f, $\mathrm{D}f \varepsilon \mathrm{qF}(u‘k)$.$\supset$.
ᵽ$(fu,k,p) = (\mathrm{D}f)up \times$ ᵽ(u,k,p)

Cette P donne la règle pour trouver le ᵽ d'une fonction de fonction.

·41 $i \varepsilon$ vct$-\iota 0$.$\supset$. ᵽ$[i \times (p-a) \mid p, \mathrm{pnt}-\iota a, p] = i$

·42 ᵽ$[i \times \mathrm{U}(p-a) \mid p, \mathrm{pnt}-\iota a, p] =$
$\{i - [i \times \mathrm{U}(p-a)]\mathrm{U}(p-a)\}/\mathrm{mod}(p-a)$

·8 ᵽ$[\log(p-a)^2 \mid p, \mathrm{pnt}-\iota a, p] = 2\mathrm{U}(p-a) / \mathrm{mod}(p-a)$

·81 ᵽ$[\log \mathrm{mod}(p-a) \mid p, \mathrm{pnt}-\iota a, p] = \mathrm{U}(p-a) / \mathrm{mod}(p-a)$

·9 ᵽ$[\mathrm{ang}(p-a,i) \mid p, \mathrm{pnt}-\iota a, p] =$
$[\mathrm{U}(p-a) \cos(p-a,i) - \mathrm{U}i] / [\mathrm{mod}(p-a) \sin(p-a,i)]$ Boggio

v^2 v^3

✱ 70·7 $(u+v)a(v+w)a(w+u) = 2\, uavaw$

71·3 $a \varepsilon \mathrm{v}^2$.$\supset$. $\mathrm{mod}a = \mathrm{mod}(\mathrm{I}a)$ Df

·4 $u \varepsilon$ vct . $a \varepsilon \mathrm{v}^2$. $\mathrm{mod}a = 1$.$\supset$.
$(\mathrm{cmp} \| a)u = (\mathrm{cmp} \perp \mathrm{I}a)u$
{ = « composante parallèle à a de u » } Df
$(\mathrm{cmp} \perp a)u = (\mathrm{cmp} \| \mathrm{I}a)u$
{ = « composante normale à a de u » } Df

·41 $(\mathrm{cmp}\,||\,a)u = 0 \;.=.\; u \varepsilon \mathrm{q}\mathrm{I}a \;.\cup.\; u = 0$
$(\mathrm{cmp}\perp a)u = 0 \;.=.\; u \times (\mathrm{I}a) = 0 \;.\cup.\; u = 0$

·5 $\mathrm{ang}(u,a) = \mathrm{ang}[u,(\mathrm{cmp}\,||\,a)u]$ Df

·6 $u,v,w \varepsilon \mathrm{vct}-\iota 0 \,.\, v -\varepsilon \mathrm{q}w \,.\, u' \varepsilon \mathrm{q}v + \mathrm{q}w \,.\, a = vaw \;.\supset.$
$\mathrm{ang}(u,u') \gtrless \mathrm{ang}(u,a)$

·7 $a,b \varepsilon \mathrm{v}^3 - \iota 0 \;.\supset.\; \mathrm{ang}(a,b) = \mathrm{ang}(\mathrm{I}a, \mathrm{I}b)$ Df

Boggio

✱ 80·2 $o \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, i \varepsilon \mathrm{vct}-\iota 0 \,.\, r \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{mod}i \leq r \;.\supset.$
$\mathrm{Volum}\{\mathrm{pnt} \frown x \ni [\mathrm{mod}(x-o) < r \,.\, (x-o) \times i \,\varepsilon\, \Theta i^2]\} =$
$\pi (r^2 - i^2/3) \,\mathrm{mod}i$

·3 $o \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, i \varepsilon \mathrm{vct}-\iota 0 \,.\, r \varepsilon \mathrm{Q} \;.\supset.$
$\mathrm{Volum}\{\mathrm{pnt} \frown x \ni [\mathrm{mod}[(\mathrm{cmp}\perp i)(x-o)] < r \,.\, (x-o) \times i \,\varepsilon\, \Theta i^2]\}$
$= \pi r^2 \,\mathrm{mod}i$

·4 $o \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, i \varepsilon \mathrm{vct}-\iota 0 \,.\, r \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, a \varepsilon \theta\pi/2 \;.\supset.$
$\mathrm{Volum}\{\mathrm{pnt} \frown x \ni [\mathrm{mod}(x-o) < r \,.\, \mathrm{ang}(x-o,i) < a]\} =$
$2\pi r^3 (1-\cos a)/3$

·5 $o \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, i \varepsilon \mathrm{vct}-\iota 0 \,.\, a \varepsilon \theta\pi/2 \;.\supset.$
$\mathrm{Volum}\{\mathrm{pnt} \frown x \ni [\mathrm{ang}(x-o,i) < a \,.\, (x-o) \times i \,\varepsilon\, \Theta i^2]\} =$
$\pi (\mathrm{mod}i)^3 (\mathrm{tng}a)^2$

Ces quatre P renferment les règles pour trouver le volume:
d'un segment de sphère de rayon *r*, dont une des bases est un grand cercle et la hauteur est mod*i*;
d'un cylindre droit de révolution, de rayon *r*, et de hauteur mod*i*;
d'un secteur sphérique de rayon *r* dont l'angle au sommet est 2*a*;
d'un cône droit de révolution dont l'angle au sommet est 2*a*, et la hauteur est mod*i*.

·6 $o,o' \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, a \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{mod}(o-o') < a \;.\supset.$
$\mathrm{Volum}\{\mathrm{pnt} \frown x \ni [\mathrm{mod}(x-o) + \mathrm{mod}(x-o') < a]\}$
$= \pi a [a^2 - (o-o')^2]/6$

Cette P exprime le volume d'un ellipsoïde de révolution dont *o*,*o'* sont les foyers et le plus grand axe est *a*. Boggio

✱ 81·2 Hp P80·2 $.\supset.$
$\mathrm{Area}\{\mathrm{pnt} \frown x \ni [\mathrm{mod}(x-o) = r \,.\, (x-o) \times i \,\varepsilon\, \Theta i^2]\} = 2\pi r \,\mathrm{mod}i$

·3 Hp P80·3 $.\supset.$ $\mathrm{Area}\{\mathrm{pnt} \frown x \ni [\mathrm{mod}[(\mathrm{cmp}\perp i)(x-o)] = r \,.$
$(x-o) \times i \,\varepsilon\, \Theta i^2]\} = 2\pi r \,\mathrm{mod}i$

·4 Hp P80·4 $.\supset.$ $\mathrm{Area}\{\mathrm{pnt} \frown x \ni [\mathrm{mod}(x-o) = r \,.\, \mathrm{ang}(x-o,i) < a]\}$
$= 2\pi r^2 (1-\cos a)$

·5 Hp P80·5 $.\supset.$ $\mathrm{Area}\{\mathrm{pnt} \frown x \ni [\mathrm{ang}(x-o,i) = a \,.\, (x-o) \times i \,\varepsilon\, \Theta i^2]\}$
$= \pi i^2 \sin a \,/(\cos a)^2$ Boggio

§vct 81·6 $o\,\varepsilon$ pnt . $a,b,c\,\varepsilon$ U‘(vct−ι0) .⊃. Area[o+U‘(vct−ι0)] ∩ $x϶(x-o\ \varepsilon\ \mathrm{Q}a+\mathrm{Q}b+\mathrm{Q}c = \mathrm{ang}(a;b,c) + \mathrm{ang}(b;c,a) + \mathrm{ang}(c;a,b) - \pi$

{ HARRIOT, a.1603 dans les Mss. inédits, qui vont paraître dans le Bullett. di Storia d. Mat. a.1902, p.1;

GIRARD, a.1629; CAVALIERI, a.1632 }

Cavalieri en a publié le premier une démonstration complète. (v

BIBLIOGRAPHIE RELATIVE À CES ADDITIONS

Andrade	§prob	Gregory	§q$_n$ 24·7
Archimede	§vct 53·21	Günther	§Dtrm
Arzelà	§S 5·1	Harriot	§vct 81·6
Cagnoli	§vct 34·9	Hurwitz	§Q 71·1
Cardano	§Σ 11n	Jacobi	§Dtrm
Cavalieri	§vct 81·6	Kronecker	§Dtrm
De Sanctis	§q$_n$ 25·1	Lagrange	§lim 22·1·11, 23·6 §Fc ·71
Eisenstein	§|	Lindemann	§↾ 6·1
Euler	§Fc	Pascal	§vct 53·5
Fermat	§↾ 6·1	Peirce G.	§π 1·83
Fontebasso	§Np 6·5	Sarasa	§log 5·1
Forsyth	§π 3·81	Schur	§vct n
Gander	§Σ 4·2	Seitz	§Σ 4·2
Giudice	§Subst 16·2	Siacci	§Dtrm
Girard	§vct 81·6	Stern	§Dtrm
Gregorius a S. Vinc.	§log 5·1	Zeipel	§Dtrm 5·3

FIN DU TOME VII